

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 541.13:537.36

Ю. П. ЧЕРНОВ

Омский государственный
технический университет

ИССЛЕДОВАНИЕ РАВНОВЕСНОГО МЕМБРАННОГО ПОТЕНЦИАЛА НА МОДЕЛЬНОЙ МЕМБРАНЕ

Целью работы является исследование равновесного мембранного потенциала, формирующегося по обе стороны модельной мембраны, разделяющей солевые растворы разных концентраций. Разность потенциалов на мембране обусловлена диффузией ионов через мембрану, возникающей при разных концентрациях солевых растворов по разные стороны мембраны. Показано, что для опытного образца катионпроводящей мембраны полученные данные хорошо согласуются с уравнением Нернста. В случае же анионпроводящей мембраны данные вполне согласуются с уравнением Гендерсона. Результаты проведенных экспериментов позволяют сделать вывод о возможности применения уравнений Нернста и Гендерсона для описания механизма пассивного транспорта ионов через модельные мембраны.

Ключевые слова: мембрана, потенциал, диффузия, ионы, концентрация.

Равновесным мембранным потенциалом называется стационарная разность электрических потенциалов, которая регистрируется по разные стороны мембраны.

Мембранный потенциал определяется разной концентрацией ионов в растворах по обе стороны мембраны и диффузией ионов через мембрану. Если концентрации какого-либо иона различаются по разные стороны мембраны и мембрана для него будет проницаема, возникает поток ионов через мембрану про-

тив градиента концентраций, приводящий к возникновению разности электрических потенциалов по обе стороны мембраны

$$\varphi_M = \varphi_2 - \varphi_1,$$

которая будет препятствовать дальнейшему перемещению ионов через мембрану. В результате этого процесса образуется равновесный мембранный потенциал.

Теоретическая зависимость равновесного мембранного потенциала от концентрации растворов в

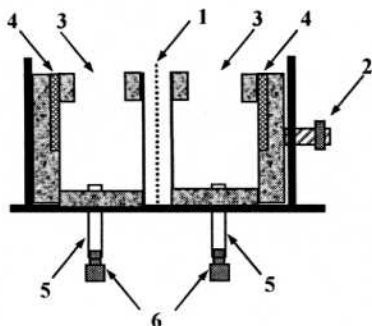


Рис. 1. Схема экспериментальной камеры

случае, когда мембрана проницаема для ионов только одного вида, описывается уравнением Нернста [1–3]:

$$\varphi_M = \varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{RT}{zF} \ln \left(\frac{C_2}{C_1} \right),$$

где в случае раствора NaCl следует принять $z = +1$ для катионов и $z = -1$ для анионов соответственно, а $RT/F \approx 25,6$ мВ при температуре раствора $t = 25^\circ\text{C}$, когда $T = 298$ К.

В случае проницаемости мембраны для анионов и катионов зависимость равновесного мембранного потенциала от концентраций солевого раствора может быть определена по уравнению Гендерсона [2–4]:

$$\varphi_M = \varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{RT}{zF} \cdot \left(\frac{p^+ - p^-}{p^+ + p^-} \right) \ln \left(\frac{C_2}{C_1} \right),$$

где p^+ и p^- есть подвижности катионов и анионов в мембране соответственно.

В работе на лабораторной установке исследован равновесный мембранный потенциал, возникающий по разные стороны модельной мембраны, разделяющей в камере два солевых раствора NaCl различных концентраций. В качестве модельной мембраны используются две искусственные мембраны, изготовленные из термоусадочной перхлорвиниловой ткани, обозначенные условно МК-40 и МА-40.

В эксперименте используется разборная камера, схема которой показана на рис. 1. Мембрана 1 помещается между двумя половинками разборной камеры и прижимается винтом 2. Отверстия сливных трубок закрываются пробками 5 и 6, а через отверстия 3 одна половина камеры заполняется раствором 1 одной концентрации (например, 0,1 % NaCl), а другая – раствором 2 другой концентрации (например, 1 % NaCl). Электроды 4 вставляются в узкие отверстия половинок камеры. Для измерений в эксперименте используются поляризующиеся электроды, изготовленные из нержавеющей стали. Для измерения разности потенциалов использовался рН-метр в режиме измерения милливольтметром.

Измеренная на электродах разность потенциалов представляет собой суммарную разность потенциалов электрохимической поляризации электродов [2] и мембранного потенциала: $U_{\text{общ}} = U_{\text{эл}} + U_M$. В работе разность потенциалов поляризации электродов $U_{\text{эл}}$ измеряется независимо в одном из солевых растворов NaCl и затем учитывается при оценке мембранного потенциала, который рассчитывается по формуле:

$$U_M = U_{\text{общ}} - U_{\text{эл}},$$

Результаты экспериментальных значений мембранного потенциала для мембраны МК-40 при раз-

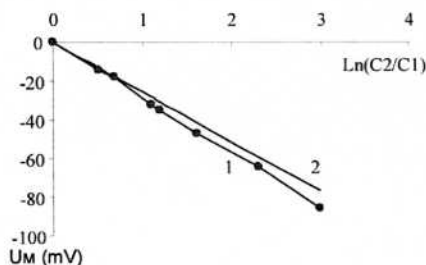


Рис. 2. Зависимость равновесного мембранного потенциала от концентраций растворов для мембраны МК-40, проницаемой для ионов Na^+ (1 – экспериментальная линия, где \circ – экспериментальные точки; 2 – прямая теоретической зависимости уравнения Нернста)

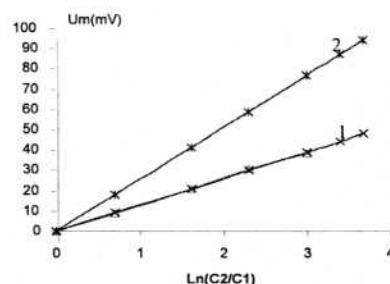


Рис. 3. Зависимость равновесного мембранного потенциала от концентраций растворов для мембраны МА-40, проницаемой для анионов Cl^- и катионов Na^+ (1 – экспериментальная линия, 2 – прямая теоретической зависимости уравнения Нернста; Δ – экспериментальные значения, \times – теоретические значения)

личных концентрациях растворов NaCl приведены на линии (1) рис. 2. По оси абсцисс отложены значения натурального логарифма $\ln(C_2/C_1)$, вычисленные для отношений концентраций разных растворов. Для сравнения прямая (2) на этом рисунке представляет график теоретической зависимости мембранного потенциала от логарифма отношений концентраций $\ln(C_2/C_1)$, рассчитанного с помощью уравнения Нернста для катионов. Из графика следует, что мембранный потенциал подчиняется логарифмической зависимости от отношения концентраций растворов. Сопоставление экспериментальных и теоретических значений мембранного потенциала показывает хорошее согласие уравнения Нернста с экспериментом. Наблюдается небольшое угловое расхождение линий, которое, возможно, обусловлено спецификой методики измерений. Отношение усредненных значений угловых коэффициентов для двух линий на графике равно 1,12. Мембранный потенциал принимает отрицательные значения в растворе с большей концентрацией, что говорит о преимущественной проводимости мембраны для катионов Na^+ . Близкое расположение экспериментальной и теоретической линий на графике указывает на то, что мембрана практически не проницаема для анионов Cl^- .

Результаты измеренных значений мембранного потенциала для мембраны МА-40 при разных концентрациях раствора NaCl находятся на линии (1) графика, приведенного на рис. 3. По оси абсцисс графика отложены значения натурального логарифма $\ln(C_2/C_1)$, вычисленные для отношений концентраций разных растворов. Для сравнения на этом рисунке приведена прямая (2) графика теоретической зависимости

мембранного потенциала от логарифма отношений концентраций $\ln(C_2/C_1)$, рассчитанного с помощью уравнения Нернста в случае проницаемости мембраны для анионов. Из графика следует, что мембранный потенциал подчиняется логарифмической зависимости от отношения концентраций растворов. Сопоставление экспериментальных и теоретических значений мембранного потенциала показывает, что экспериментальные данные не согласуются с уравнением Нернста. Наблюдается значительное угловое расхождение линий. Отношение средних значений угловых коэффициентов для двух линий на графике составляет 0,53. Мембранный потенциал принимает положительные значения в растворе с большей концентрацией, что указывает на преимущественную проводимость мембраны для анионов Cl^- .

Существенное расхождение между экспериментальной и теоретической линиями на графике указывает на то, что мембрана МА-40 проницаема как для анионов Cl^- , так и для катионов Na^+ .

Проведенные с помощью уравнения Гольдмана [1] расчеты показали, что полученным экспериментальным данным соответствует отношение проницаемостей мембраны для катионов и анионов $P_{Na}/P_{Cl} \approx 0,18$.

Работа выполнена в лаборатории на кафедре медицинской и биологической физики Омской государ-

ственной медицинской академии. Предложенная методика измерений может найти приложение при изучении механизма возникновения мембранного потенциала в растворах на лабораторных работах по курсу биофизики, а также в научных исследованиях.

Библиографический список

1. Биофизика / Антонов В.Ф., Черныш А.М. [и др.] : учебник для вузов. — М.: ВЛАДОС, 2000. — 288 с.
2. Рубин А.Б. Биофизика. Кн. 1: Теоретическая биофизика. — М.: Высшая школа, 1987. — 317 с.
3. Владимиров Ю.А. [и др.] Биофизика. — М.: Медицина, 1983. — 272 с.
4. Антропов А.И. Теоретическая электрохимия. — М.: Высш. шк., 1975. — 568 с.

ЧЕРНОВ Юрий Петрович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики и информационных систем.

Адрес для переписки: 644050, г. Омск, пр. Мира, 11.

Статья поступила в редакцию 29.06.2009 г.

© Ю. П. Чернов

УДК 681.3.06

**В. Н. ЗАДОРОВИЧ
Е. Б. ЮДИН**

Омский государственный
технический университет

СТАТИСТИЧЕСКИ ОДНОРОДНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ГРАФЫ: ОПРЕДЕЛЕНИЕ, ГЕНЕРАЦИЯ, ПРИМЕНЕНИЕ

Вводится понятие статистически однородного графа (СОГ), охватывающее ряд широко известных графовых моделей и позволяющее строить множество новых. Предлагаются методы построения разнообразных СОГ. Рассматриваются прикладные задачи, эффективно решаемые путем представления больших сетевых структур в виде случайных СОГ.

Ключевые слова: статистически однородный случайный граф, безмасштабный случайный граф, пуассоновский случайный граф, планарный случайный граф, генерация случайных графов.

1. Введение

В последние годы резко возрос интерес к исследованию больших сетевых структур (БСС), таких как сложные социальные и биологические сети, инженерные коммуникации, транспортные сети мегаполисов, межмолекулярные взаимодействия в различных средах и т.д. Большие размеры и сложность БСС обусловили рост разнообразия их стохастических моделей — случайных графов (сл.г.) и становление теории сл.г. как самостоятельной научной дисциплины.

Одним из наиболее широко известных видов сл.г. является граф Эрдеша-Реньи [1, 2]. Его генерируют

на N вершинах: всякую их пару случайно, с вероятностью p , связывают ребром. Различные характеристики такого графа — коэффициент кластеризации, диаметр, вероятности появления тех или иных подграфов и др. — выражены через его параметры N и p [3]. Локальная степень связности (связность) k его вершин имеет биномиальное распределение вероятностей и в среднем равна $\langle k \rangle = p \cdot (N-1)$. В дальнейшем нас будут интересовать бесконечные или очень большие графы. Очевидно, при $N \rightarrow \infty$ и $\langle k \rangle = \text{const}$ биномиальное распределение связности k становится пуассоновским (отсюда второе название графа Эрдеша-Реньи — пуассоновский граф).

Граф Эрдеша-Реньи является простейшим сл.г.: наличие связи между любыми двумя его вершинами определяется «чистой случайностью», независимо от наличия связей между другими вершинами. На его конфигурацию не накладывается никаких ограничений. При конечном N он может получиться полным или пустым, планарным или не планарным, состоять из одной или из нескольких компонент связности и т.д. Это делает его непригодным для моделирования многих реальных сетей. Поэтому большое число работ по теории сл.г. посвящается исследованию других их видов [4, 5, 6].

Задачей, решаемой в настоящей статье, является разработка общей математической основы для описания и анализа различных видов сл.г., применяемых при моделировании БСС. В качестве такой основы предлагается использовать класс статистически-однородных графов (СОГ). Дается формальное определение статистической однородности графа, рассматриваются конструктивные подходы к построению и анализу СОГ, обсуждаются области их применения.

2. Scale-free графы

Ещё в 1965 г. Д. Прайс на примере сети цитирования показал, что в реальном мире существуют большие сети, связность узлов в которых распределена не по биномиальному, а по степенному закону [7]. Позже он объяснил происхождение степенного закона особенностью генезиса таких сетей, названной им «кумулятивным преимуществом», а ныне более известной как «предпочтительное связывание». Если, начиная с небольшой «затравки», сеть растет таким образом, что новые узлы «предпочитают» присоединяться к узлам с высокой связностью, т.е. если вероятность p_i связывания с i -м узлом пропорциональна его связности k_i :

$$p_i = k_i / \sum_j k_j, \quad (1)$$

то с ростом сети распределение связности k сходится к асимптотически-степенному закону $Q_k \propto k^{-\alpha}$, где Q_k — вероятность значения k ($k = m, m+1, \dots$; $m \geq 1$ — число связей, добавляемых с каждым новым узлом), $\alpha > 1$ — константа.

В 1999 г. Р. Альберт и А. Барабаши [4] в ходе исследования сетей web-сайтов переоткрыли подход Д. Прайса, и сл.г., генерируемые по правилу предпочтительного связывания (1), теперь нередко именуют графами Барабаши-Альберт. Сами Р. Альберт и А. Барабаши дали своим графам название *scale-free* (безмасштабные) графы, подчеркивая этим принадлежность распределения $Q_k \propto k^{-\alpha}$ классу масштабно-инвариантных распределений. Эти распределения — степенные, асимптотически-степенные, гиперболические — широко распространены, например, в экономической статистике (благодаря трудам В. Парето), в теории стохастических фракталов [8] и в теории сетевого трафика [9, 10]. Таким образом, *scale-free* графы — это *асимптотически-степенные* графы. В последовавших за работой [4] интенсивных публикациях А. Барабаши и другие авторы убедительно показывают, что *scale-free* графы адекватно описывают многие сетевые структуры, изучаемые различными прикладными науками.

Scale-free графы (как и графы Эрдеша-Реньи) рассматриваются нами как частные случаи *статистически однородных графов* (СОГ) — базовой математической модели больших сетей, разрабатываемой в статье. Обзор публикаций о *scale-free* графах с этой точки зрения приводит к необходимости уточнения

ряда недостаточно освещенных моментов, включая следующие: 1) каково точное распределение связности вершин *scale-free* графов; 2) насколько распределение связности обуславливает структурные свойства графа; 3) насколько структурные свойства графа обуславливаются методом его генерации.

3. Точное распределение связности вершин *scale-free* графа

Положим, для простоты, что генерация *scale-free* графа начинается с «затравки» — полного графа на $2m+1$ вершинах ($m \geq 1$) — и выполняется следующим стандартным методом. На каждом шаге генерации к имеющемуся N -вершинному графу добавляется одна вершина и связывается m ребрами со случайно выбранными, в соответствии с вероятностями (1), вершинами имеющегося графа. Тогда на любом шаге t генерации графа ($t = 1, 2, \dots$) минимальная связность его вершин составляет $k_{\min} = m$, а средняя связность $\langle k \rangle = 2m$.

Разобьем на шаге t множество всех вершин имеющегося графа на подмножества A_k (слои) вершин, содержащие вершины с одинаковой связностью k ($k = m, m+1, \dots$). Вероятность Q_k слоя A_k определим как вероятность попадания в этот слой при случайном (равновероятном) выборе любой из N вершин имеющегося графа: $Q_k = |A_k| / N$, где $|A_k|$ — число вершин со связностью k . Вероятность того, что в бесконечном *scale-free* графе случайно выбранная вершина имеет связность k , найдем как предел вероятности Q_k при $t \rightarrow \infty$.

На шаге t вероятность P_k выбора вершины из слоя A_k для связи с новой вершиной (данном ребром из m ее ребер) определяется по правилу предпочтения:

$$P_k = \sum_{i \in A_k} p_i = \frac{\sum_{i \in A_k} k_i}{\sum_{j=1}^N k_j} = \frac{|A_k| \cdot k}{\sum_{l \geq m} |A_l| \cdot l} = \frac{k Q_k N}{N \sum_{l \geq m} Q_l \cdot l} = \frac{k Q_k}{\langle k \rangle}, \quad k \geq m. \quad (2)$$

Финальную вероятность Q_k , достигаемую в пределе при $t \rightarrow \infty$, найдем из уравнения баланса вероятностей, которое составим следующим образом.

За один шаг генерации в граф добавляется одна вершина с m ребрами. Число $|A_m|$ вершин слоя A_m увеличивается на 1 (в этот слой попадает новая вершина) и одновременно уменьшается (т.к. из этого слоя уходят вершины, когда к ним присоединяется новое ребро) в среднем на $m P_m = m^2 \cdot Q_m / \langle k \rangle$ вершин. Уравнение баланса получим, формально приравнявая выражения для Q_m до и после выполнения шага генерации:

$$Q_m = \frac{|A_m|}{N} = \frac{|A_m| + 1 - m^2 Q_m / \langle k \rangle}{N + 1},$$

или

$$|A_m| \cdot N + |A_m| = N \cdot |A_m| + N - m^2 Q_m / \langle k \rangle.$$

Учитывая, что $|A_m| = N Q_m$, делим обе части уравнения на N и находим

$$Q_m = \frac{\langle k \rangle}{\langle k \rangle + m^2}. \quad (3)$$

Аналогично получаем уравнение баланса при $k > m$. Число $|A_k|$ за один шаг генерации в среднем

(за счет прихода вершин из слоя A_{k-1}) возрастает на $mP_{k-1} = m(k-1)Q_{k-1}/\langle k \rangle$ и уменьшается на $mP_k = mkQ_k/\langle k \rangle$. Уравнение баланса

$$Q_k = \frac{|A_k|}{N} = \frac{|A_k| + \frac{m(k-1)Q_{k-1}}{\langle k \rangle} - \frac{mk \cdot Q_k}{\langle k \rangle}}{N+1}$$

дает для финальных вероятностей соотношение:

$$Q_k = Q_{k-1} \frac{m \cdot (k-1)}{\langle k \rangle + m \cdot k}, \quad k \geq m+1. \quad (4)$$

Рекуррентное определение (3), (4) последовательности Q_k , $k = m, m+1, \dots$ позволяет найти для Q_k явное выражение. Подставляя $\langle k \rangle = 2m$ в (3), (4), имеем:

при $k = m$:

$$Q_m = \frac{\langle k \rangle}{\langle k \rangle + m^2} = \frac{2m}{2m + m^2} = \frac{2}{m+2},$$

при $k = m+1$:

$$Q_k = Q_{m+1} = Q_m \frac{m}{m+3} = \frac{2m}{(m+2)(m+3)},$$

при $k = m+2$:

$$Q_k = Q_{m+2} = Q_{m+1} \frac{m+1}{m+4} = \frac{2m(m+1)}{(m+2)(m+3)(m+4)},$$

при $k = m+3$:

$$Q_k = Q_{m+3} = Q_{m+2} \frac{m+2}{m+5} = \frac{2m(m+1)}{(m+3)(m+4)(m+5)},$$

или, в общем виде,

$$Q_k = \frac{2m(m+1)}{k(k+1)(k+2)}, \quad k \geq m. \quad (5)$$

Распределение связности (5) отвечает условию нормирования $\sum_{k \geq m} Q_k = 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq m} Q_k &= \sum_{k \geq m} \frac{2m(m+1)}{k(k+1)(k+2)} = \\ &= m(m+1) \cdot \sum_{k \geq m} \left(\frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2} \right) = 1. \end{aligned}$$

Примечания.

1). В [4] для Q_k найдена асимптотическая оценка $Q_k \sim 2m^2 k^{-3}$, используемая в форме плотности $f(s) = 2m^2 s^{-3}$, $s \geq m$. Эта смещенная оценка дает несмещенную оценку средней связности вершин: $\langle k \rangle = \int_{s \geq m} sf(s)ds = 2m$.

2). Точное распределение (5) найдено также (другим методом) в работе [11]. Результаты [11] и настоящей статьи, полученные независимо, совпадают.

3). В программном генераторе *scale-free* графа случайный выбор вершины в соответствии с вероятностью (1) целесообразно выполнять в два этапа: вначале по распределению (2) следует разыграть номер слоя вершин, и затем взять любую вершину этого слоя равновероятно. Эксперименты с генерацией графов размером 500 – 10000 вершин показали, что такой генератор работает на порядок быстрее генератора системы моделирования AnyLogic и в десятки раз быстрее генератора распространенной библиотеки JUNG (Jung.sourceforge.net).

4). Если при построении графа применять функцию предпочтения $f \geq 0$ (любую), задавая вероятность привязки к i -й вершине в виде $p_i = f(k_i) / \sum_j f(k_j)$, то, согласно уравнениям баланса, ряд распределения Q_k будет иметь вид

$$Q_m = \frac{a}{a + m \cdot f(m)},$$

$$Q_k = Q_{k-1} \frac{m \cdot f(k-1)}{a + m \cdot f(k)}, \quad (k = m+1, m+2, \dots), \quad (6)$$

где (если такое распределение существует) параметр $a = \langle f \rangle$ можно определять из уравнения $\sum_{k \geq m} Q_k = 1$ или $\sum_{k \geq m} k \cdot Q_k = 2m$, или $a = \sum_{k \geq m} f(k) \cdot Q_k$. Разные f позволяют получать разные (не только степенные) распределения Q_k .

5). Любопытную картину связности дает логарифмическое предпочтение $f = \log(k)$. В этом случае, независимо от выбора основания логарифма и параметров $a > 0$, $m > 0$ (вещественных), ряд (6) отвечает условию нормирования $\sum_{k \geq m} Q_k = 1$. Аналогичные свойства имеет инверсное предпочтение $f = 1/\log(k)$. Эти модели предпочтения отвечают, например, логарифмической шкале силы сигналов на «информационном выходе» органов чувств человека.

4. Распределение связности вершин и структурные свойства графа

Вообще говоря, асимптотически-степенное распределение связности, положенное в основу наименования *scale-free* графов, никак не определяет их структурные свойства. Это можно видеть из приведенных на рис. 1 примеров графов, которые все имеют одно и то же степенное распределение связности вершин, но по своей структуре определено не все являются *scale-free* графами. Слева изображен *scale-free* граф, по центру – степенное дерево и справа – степенной «творог», состоящий из бесконечного числа компонент связности – «сгустков». Связность вершин каждого из трех графов распределена по закону (5) с $m = 2$.

Написанные нами генераторы степенного дерева и степенного «творога» реализуют методы, отличные от правила предпочтительного связывания. Из приведенных примеров видно, что структурные свойства

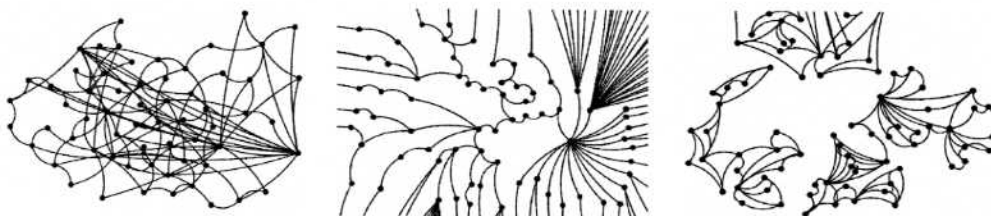


Рис. 1. Три разных вида графов с одинаковым степенным распределением связности

scale-free графов и сам их «род» определяются методом генерации, но не распределением связности. И степенное распределение связности узлов реальной сети — лишь косвенный (необходимый, но не достаточный) признак ее принадлежности к роду *scale-free*.

5. Релевантность и статистическая согласованность

Сл.г. будем называть релевантным моделируемым сетям, если он генерируется способом, подобным способу формирования этих сетей.

Если подобие между графами и/или сетями определяется близостью их статистических характеристик, будем называть такие графы и сети статистически согласованными. Для статистического согласования генерируемых графов с моделируемыми сетями может потребоваться калибровка алгоритма генерации, т.е. численный подбор подходящих значений его варьируемых параметров. Чтобы углубить статистическое согласование наряду с распределением связности [12], учитывают коэффициенты кластеризации графов [13], их диаметры [14], статистику подграфов определённой структуры [15] и т.д. Однако возникающие при этом вопросы о контроле глубины согласования и о близости ее к исчерпывающему статистическому согласованию остаются открытыми.

6. Статистически однородные случайные графы

Новые возможности для теоретической разработки и практического использования широкого набора конструктивных статистических характеристик сл.г. открываются в связи с предлагаемым ниже понятием (и определением) статистически однородного графа (СОГ). Определение СОГ непосредственно указывает на способы построения рядов характеристик, углубляющих статистическое согласование СОГ и в пределах обуславливающих полное согласование.

Пусть на множестве G графов некоторого вида (например, всех неориентированных графов без петель и кратных ребер) задана вероятностная мера P .

Определение. Сл.г. $G \in \langle P, G \rangle$ назовем *статистически однородным* в узком смысле, если для любой вершины v при всяком $r = 1, 2, \dots$ сл.г. $G_v^r \subseteq G$, лежащий на ее r -окрестности, принадлежит распределению $\langle P^r, G^r \rangle$, не изменяющемуся при описании сл.г. G_w^r на r -окрестности любой другой вершины w .

Пояснения. 1). Граф $G_v^r \subseteq G$ — это граф, который содержит все вершины графа G , удаленные от вершины v на расстояние не более r (непустая часть которых удалена на r), и все инцидентные им, и только им, ребра.

2). Если с вероятностью $\pi_r > 0$ граф $G_v^r \subseteq G$ не существует, то распределение $\langle P^r, G^r \rangle$ приписывает вероятность π_r графу G_\emptyset , содержащему пустое множество вершин и пустое множество ребер.

Пример. Граф Эрдеша-Реньи на N вершинах статистически однороден в узком смысле, поскольку метод его генерации не различает вершин ни в стадии затравки (когда вершины изолированы), ни в стадии добавления связей. Этот метод индуцирует распределение $\langle P^r, G^r \rangle$ сл.г. $G_v^r \subseteq G$, не зависящие от v .

Статистическая однородность графа в широком смысле определяется критериями, соответствующими более слабым градациям однородности. Наиболее легко достижимый критерий однородности в широком смысле — это независимость от v среднего числа вершин в сл.г. G_v^r . Пример критерия более

глубокой однородности — независимость от v распределений $\langle P^r, G^r \rangle$.

Глубину статистического согласования больших или бесконечных СОГ можно регулировать, увеличивая или уменьшая радиусы r тех окрестностей, по распределениям $\langle P^r, G^r \rangle$ которых достигается согласование. Если r устремить к бесконечности, то в пределе будет получено исчерпывающее согласование: согласованные таким образом СОГ будут статистически эквивалентны.

7. Ускоренный метод генерации пуассоновского графа

Бесконечный пуассоновский граф статистически однороден в узком смысле (как частный случай графа Эрдеша-Реньи). При анализе выборочных пространств $\langle P^r, G^r \rangle$ немедленно выясняется, что любая конечная окрестность вершины пуассоновского графа может индуцировать только деревья. Это позволяет предложить следующий метод его генерации, более экономичный и точный, чем генерация соответствующего «большого» графа Эрдеша-Реньи.

При заданной средней связности $\langle k \rangle = a > 0$ генерация пуассоновского графа начинается с произвольной вершины. Ее связность $k = 0, 1, 2, \dots$ разыгрывается по распределению Пуассона $p_k = a^k e^{-a} / k!$, и к ней k ребрами присоединяются «почки». Далее для каждой почки ее полная связность $k \geq 1$ разыгрывается (независимо) по условной вероятности $P(k | k \geq 1) = a^k e^{-a} / (1 - e^{-a}) / k!$, и к каждой почке добавляется соответствующее (свое) число $k - 1 \geq 0$ новых почек, а сама эта почка становится узлом или листом. Затем вновь разыгрывается полная связность каждой почки и т.д., пока число почек не станет равно нулю. После этого можно выращивать следующую компоненту связности графа. Таким образом, пуассоновский граф есть лес, часть деревьев которого вырождена в изолированные вершины. Время генерации графа изложенным методом пропорционально числу его вершин N . Для графа Эрдеша-Реньи оно пропорционально N^2 .

8. Планарные СОГ

Частным случаем СОГ является широко используемая в теории перколяции [16] бернуллиева решетка (БР) — сл.г., определяемый случайным удалением ребер или узлов бесконечной сетки с квадратными ячейками. Моделируя посредством БР надежность БСС, принимают, что потере функциональности БСС, т.е. «обвалному» отказу связей, соответствуют состояния БР, в которых она распадается на компоненты связности конечного размера. Работоспособному состоянию ставятся в соответствие состояния БР, характеризующиеся наличием т.н. *гигантского* контактного кластера — бесконечной компоненты связности.

В конечной БР размером $p \times l$ вершин гигантскому кластеру приближенно соответствует *стягивающий* кластер, соединяющий ее противоположные стороны. Для БР теория перколяции устанавливает, что зависимость их надежности P (вероятности работоспособного состояния) от ненадежности p их элементов (от вероятности их отказа) имеет переключательный (*критический*) характер.

На рис. 2 изображен ступенчатый график зависимости $P(p)$ бесконечной БР. Критический характер зависимости $P(p)$ для конечных решеток ослабляется (тем больше, чем меньше их размер), и смена фазовых

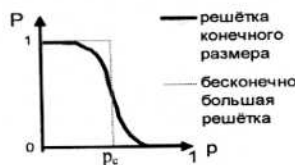


Рис. 2. Вероятность гигантского (стягивающего) кластера

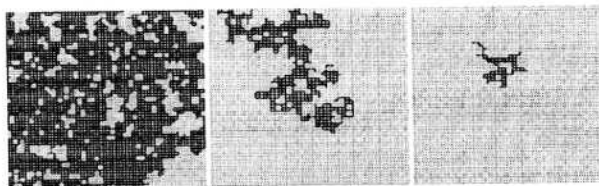
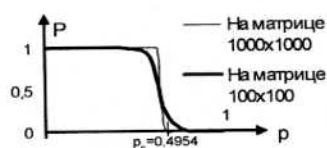
Рис. 3. Максимальные контактные кластеры БР в трех опытах с разными p (остальные кластеры не показаны)

Рис. 4. Оценка порога перколяции в задаче ребер для планарных сл.г.

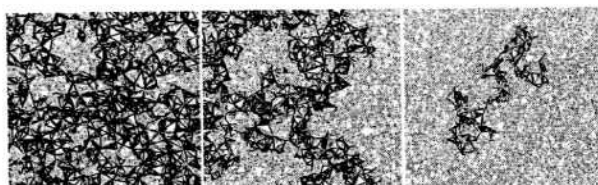


Рис. 5. Максимальные контактные кластеры в трех опытах с планарным сл.г.

состояний происходит не в критической точке p_c , а в некоторой критической области значений p . Размеры контактных кластеров БР зависят от p (рис. 3). Критические явления (скачкообразные фазовые переходы) изучаются в теории перколяции для решеток разного вида (треугольных, гексагональных и др.) и разной размерности (плоских, трехмерных и т.д.). Разработанные нами генераторы планарных СОГ [17] и опыты с ними позволяют распространить ряд законов теории перколяции и на эти сл.г. (с применением найденных экспериментально числовых коэффициентов). Сл.г. более релевантны ряду БСС, чем решетки.

На рис. 4, 5 показаны результаты опытов с перколяцией на планарных СОГ, выращиваемых методом экспансии в пространстве клеточных автоматов [18].

Метод экспансии описан в [17]. Генерация сл.г. методом экспансии сводится к случайному разбрасыванию на плоскости «зерен», имеющих разную «силу роста», которая определяет вероятность захвата зерном малых ячеек, соседних занятой им области. Процесс случайных захватов ячеек заканчивается формированием плоской карты областей, захваченных зернами, которая и определяет соответствующий планарный граф соседства (рис. 6).

Графы экспансии проявляют критические свойства, все более четко выражаемые с ростом их размеров. В частности, параметр σ , определяющий ширину критической области параметра p , с ростом числа



Рис. 6. Формирование планарного СОГ методом экспансии

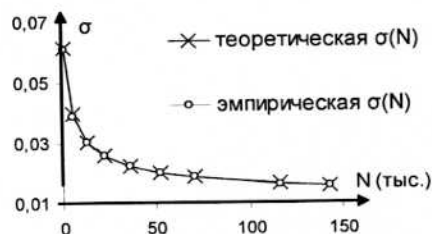
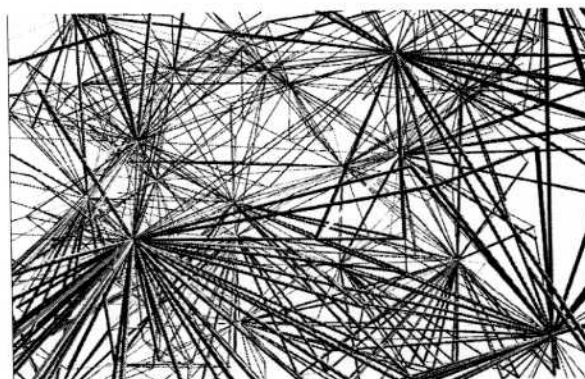
Рис. 7. Теоретическая и эмпирическая зависимости σ от N в сл.г. экспансии

Рис. 8. Фрагмент сл.г. трёхмерной экспансии

узлов N уменьшается (рис. 7) по степенному закону $\sigma(N) = CN^{-1/(v-d)}$, где $d=2$ — размерность пространства, C — коэффициент, зависящий от семейства графов, v — одна из констант теории решеточной перколяции. Подбор v и C по эмпирическим зависимостям $\sigma(N)$, полученным для сл.г. плоской экспансии методом Монте-Карло, подтверждает применимость к ним константы $v=4/3$, установленной для плоских решеток.

Аналогичные опыты возможны с графами трехмерной экспансии (рис. 8).

9. Декомпозиционные и подстановочные СОГ

Для генерации СОГ с возможностью широкого варьирования их структуры можно использовать метод декомпозиций или метод подстановок. Метод декомпозиций заключается в выращивании сл.г. из небольшой затравки заменой вершин или ребер случайными подграфами из заданного распределения. Вырабатываемые декомпозиционные графы релевантны техногенным БСС, которые проектируются методом «сверху вниз», например, структурам сложного программного обеспечения (ПО). Примеры применения метода декомпозиции рассматриваются в [19, 20]. Подстановочные методы обобщают метод декомпозиции и используют замену подграфов на подграфы большего размера. В [14] предлагается подстановочный метод генерации сл.г. и метод их калибровки.

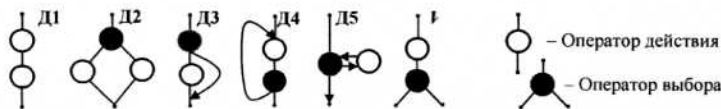
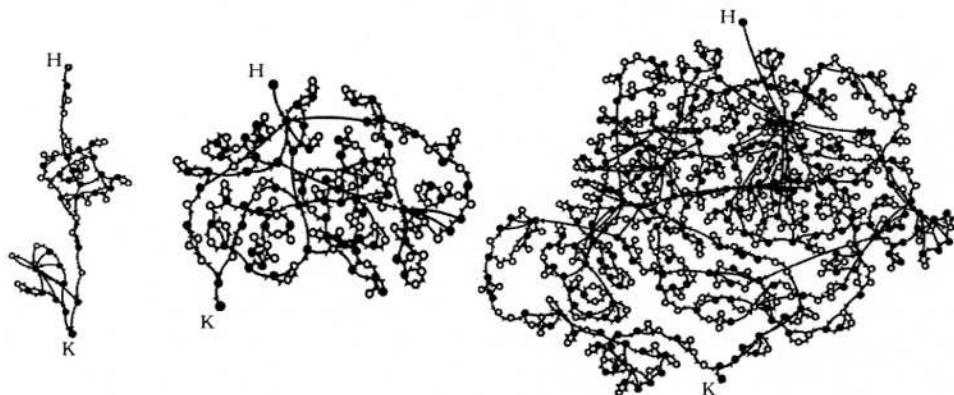


Рис. 9. Подграфы D1-D5 – замены оператора действия и V – замена оператора выбора

Рис. 10. Реализации оргграфа, релевантного структурам ПО.
В методе декомпозиции вершин использовались подграфы D1-D5 и V. Точки H и K – начало и конец оргграфа

Одно из применений сл.г., генерируемых методом декомпозиции, связано с Р-ориентированным (ориентированным на приложения) тестированием алгоритмов, используемых для анализа ПО [20]. Для генерации графов, релевантных структурам ПО, можно предложить набор подграфов (которыми будут заменяться вершины вырабатываемого графа), представленный на рис. 9. Генерация начинается из единственной вершины – оператора действия. Распределение $\langle P, G \rangle$ генерируемого графа G индуцируется заданным набором вероятностей p_1, \dots, p_5 ($p_1 + \dots + p_5 = 1$) и следующей процедурой генерации.

- 1). Задаем $k = 1$ и число шагов $n \geq 1$. Определяем G как оператор действия.
- 2). Если $k = n$, то идем к 4), иначе идем к 3).
- 3). Выбираем равновероятно любую вершину графа G , и, если она является оператором выбора, заменяем ее подграфом V , иначе – случайным подграфом из распределения $\langle p_1, \dots, p_5; D1, \dots, D5 \rangle$. Полагаем $k = k + 1$ и идем к 2).
- 4). Конец процедуры.

Примеры сл.г., генерируемых этой процедурой, приведены на рис. 10.

Калибровка сл.г., генерируемых методом декомпозиции, заметно упрощается тем, что ряд их статистических характеристик выражается через варьируемые параметры p_1, \dots, p_5 аналитически. Так, для доли p_v вершин выбора в большом графе (при $n \rightarrow \infty$), исходя из уравнений баланса, получаем выражение $p_v = \{2 - p_1 + p_2 - [4(1 - p_1) + (p_1 + p_2)^2]^{1/2}\} / (2p_2)$. Аналогичные выражения можно найти для других характеристик, таких, как плотность циклов, средняя связность вершин по заходам и/или исходам, распределение связности и т.д. [19].

Заключение

Аналитический обзор литературы по случайным графам позволяет заключить, что теория случайных графов – молодая, бурно развивающаяся отрасль наук о сложных системах – имеет широкие перспективы практического применения в области управления большими сетевыми структурами (БСС). Современное ее состояние характеризуется постановкой и решением актуальных задач теоретического обос-

нования используемых математических моделей и, одновременно, разработкой методов и комплексов программ для моделирования широкого класса БСС, являющихся предметом исследования многих прикладных наук. В этом русле находятся и результаты, полученные в данной статье:

1. Предложен метод нахождения распределений связности случайных бесконечных графов, основанный на построении уравнений баланса. Найдено точное распределение связности scale-free графа, генерируемого методом предпочтительного связывания. Предложено обобщение этого метода генерации графов, состоящее во введении произвольной функции предпочтения $f > 0$, и для нее в общем виде найдено точное распределение связности получаемых графов.

2. Предложен ускоренный метод генерации scale-free графов, позволяющий снизить время их генерации в десятки раз по сравнению с существующими методами. Предложен ускоренный метод генерации пуассоновских графов.

3. Показано, что распределение связности не является полным вероятностным описанием графа. Введено понятие статистически однородного графа (СОГ) и дано его определение, позволяющее строить конструктивные ряды характеристик для сколь угодно полного вероятностного описания статистически однородных графов. Продемонстрированы возможности разработанных авторами алгоритмов генерации планарных СОГ. Показаны перспективы применения планарных СОГ для развития и обобщения результатов теории перколяции.

4. Разработаны и исследованы алгоритмы генерации декомпозиционных СОГ, являющихся релевантными моделями сложных техногенных БСС. Рассмотрены вопросы калибровки декомпозиционных СОГ.

Библиографический список

1. Erdős P., Rényi A., On random graphs I, Publ. Math. Debrecen 6 (1959), 290 – 297.
2. Erdős P., and Rényi A., 1960, Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci. 5, 17.
3. Bollobás, B., 1985, Random Graphs (Academic, London).
4. Barabási, Albert-László and Albert, Réka. «Emergence of scaling in random networks». Science, 286: 509 – 512, October 15, 1999.

5. Duncan J. Watts & Steven H. Strogatz Collective dynamics of 'small-world' networks // Nature. — 1998. — V.393. — P.440.
6. J. Leskovec, D. Chakrabarti, J. Kleinberg, C. Faloutsos, Z. Ghahramani Kronecker graphs: an approach to modeling networks, 29 Dec 2008.
7. D. Price, Networks of scientific papers, Science, 149 (1965), pp. 510 — 515.
8. Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. — М.: Институт компьютерных исследований, 2002. — 656 с.
9. Шелухин О.И., Теняшев А.М., Осин А.В. Фрактальные процессы в телекоммуникациях / под ред. О. И. Шелухина. — М.: Радиотехника, 2003. — 480 с.
10. В. Столингс. Современные компьютерные сети. — СПб.: Питер, 2003. — 784 с.
11. Dorogovtsev, S.N. and Mendes, J.F.F. and Samukhin, A.N., «Structure of Growing Networks: Exact Solution of the Barabasi-Albert's Model», Phys. Rev. Lett. 85, 4633 (2000).
12. Clauset, Aaron; Rohilla Shalizi, Cosma; Newman, M. E. J. Power-law distributions in empirical data, SIAM Review, in press. eprint arXiv:0706.1062.
13. E.J. Newman, (2003). "The structure and function of complex networks". SIAM Review 45: 167 — 256. doi:10.1137/S003614450342480.
14. Leskovec, J.M. Kleinberg, and C. Faloutsos. Graphs over time: densification laws, shrinking diameters and possible explanations. In KDD '05: Proceeding of the 11th ACM SIGKDD international conference on Knowledge discovery in data mining, pages 177 — 187, 2005b.
15. Jure Leskovec, K.J. Lang, A. Dasgupta, and M.W. Mahoney. Community structure in large networks: Natural cluster sizes and the absence of large well-defined clusters. ArXiv, arXiv:0810.1355, Oct 2008c.
16. Эфрос А.А. Физика и геометрия беспорядка: Библиотечка «Квант» № 19. — М.: Наука, гл. редакция физ.-мат. литературы, 1982. — 175 с.
17. Задорожный В.Н., Юдин Е.Б. Генерация статистически однородных планарных графов // Обработка информации и управление. Теория и практика: сб. докл. науч.-практ. конф. — Омск: ОмГТУ, 2008. — С. 27 — 31.
18. Задорожный В.Н., Юдин Е.Б. О надежности больших статистически однородных сетей // Информационные технологии и автоматизация управления: матер. межвуз. научно-практ. конф. 20 — 24 апреля 2009 г. — Омск: ОмГТУ, 2008. — С. 184 — 186.
19. Задорожный В.Н., Юдин Е.Б. Тестирование эффективности алгоритмов на графах // Там же. — С. 180 — 183.
20. Задорожный В.Н., Юдин Е.Б., Ершов Е.С. Р-ориентированное измерение эффективности алгоритмов редукции // Там же. — С. 177 — 179.

ЗАДОРЖНЫЙ Владимир Николаевич, кандидат технических наук, доцент кафедры «Автоматизированные системы обработки информации и управления».

Адрес для переписки: e-mail zwn@yandex.ru

ЮДИН Евгений Борисович, аспирант кафедры «Автоматизированные системы обработки информации и управления».

Адрес для переписки: e-mail forrts@mail.ru

Статья поступила в редакцию 17.09.2009 г.

© В. Н. Задорожный, Е. Б. Юдин

УДК 681.3.06

**В. Н. ЗАДОРЖНЫЙ
Е. Б. ЮДИН**

Омский государственный
технический университет

ТОЧНАЯ ТЕОРИЯ ГРАФА БАРАБАШИ-АЛЬБЕРТ

Исследуется граф Барабаши-Альберт, описывающий большие сетевые структуры типа Интернет. Вводится фундаментальная матрица Q , определяющая ряд важных структурных характеристик графа. Выводится точная формула матрицы. Устанавливаются ранее неизвестные и уточняются известные структурные свойства графа.

Ключевые слова: случайные динамические графы, большие сетевые структуры.

1. Введение

Предложенная в 1999 г. в статье Альберта Барабаши и Реки Альберт [1] модель больших сетевых структур, формируемых по принципу предпочтительного связывания (называемому еще принципом «богатый становится богаче»), завоевала за последние несколько лет огромную популярность среди исследователей больших сетей [2 — 5]. Эта модель представляет собой случайный динамический граф, выращиваемый из небольшого графа-затравки путем неограниченно повторяемых шагов добавления к графу новой вершины с m ребрами. Свободные концы ребер каждой новой вершины присоединяются преимущественно к вершинам, богатым связями, т.к. вероятность p_i

соединения ребра с i -й вершиной графа пропорциональна ее степени связности k_i :

$$p_i = k_i / \sum_j k_j. \quad (1)$$

С ростом графа Барабаши-Альберт (графа БА) ряд его числовых характеристик сходится к стационарным значениям. Так, известна стационарная вероятность Q_k того, что случайно выбранная вершина имеет степень связности k [6]:

$$Q_k = \frac{2m(m+1)}{k(k+1)(k+2)}, \quad k \geq m. \quad (2)$$

В то же время многие структурные характеристики графа БА, важные с прикладной точки зрения,

такие как коэффициент кластеризации, статистика подграфов определённой конфигурации и другие, остаются малоизученными. А если решаемая задача требует их учета, то они оцениваются приближенными асимптотическими методами [7], либо рассчитываются путем трудоемкого статистического моделирования [8]. В предлагаемой статье выводится точная рекуррентная формула, которая определяет фундаментальную матрицу Q , позволяющую точно установить многие важные конфигурационные характеристики графа БА. Для ряда из них приводятся явные аналитические выражения, найденные с помощью матрицы Q .

2. Исходные положения

Отправным пунктом, предваряющим введение матрицы Q в теорию графа БА, является констатация различия статистических свойств у двух концов любого его ребра. Различие возникает в момент добавления ребра в граф вместе с новой вершиной: только один конец ребра выбирает вершину, имеющую высокую степень связности. Это различие зафиксируем путем следующей модификации описания графа БА. Всякую новую вершину снабдим m ориентированными дугами (вместо неориентированных ребер), начала которых инцидентны этой вершине, а концы присоединяются к имеющимся вершинам графа по правилу предпочтения (1). Замена ребер дугами не изменяет графа БА, но лишь упрощает его более дифференцированное описание. В этой нотации будем рассматривать граф БА как случайный динамический орграф $G = G(t)$.

Определим слой A_k как множество вершин графа $G(t)$, имеющих степень связности k ($k = m, m+1, \dots$). По построению, вершины граничного слоя A_m инцидентны только исходящим из них дугам. Степенью дуги назовем пару (l, k) , где l — степень вершины, из которой дуга исходит (или начальная степень дуги), k — степень вершины, в которую дуга заходит (концевая степень дуги). Степень случайно выбранной дуги (с.в.д.) опишем матрицей $Q = \|Q_{l,k}\|$ вероятностей того, что дуга имеет начальную степень l и конечную степень k ($l, k \geq m$).

Определим туннель $B(l, k)$ как множество всех дуг графа $G(t)$, начало которых лежит в слое A_l , а конец — в слое A_k . Туннели $B(m, k)$ с параметром $l = m$ будем называть входными, с параметром $l \geq m+1$ — внутренними.

Начала новых m дуг, добавленных в граф $G(t)$, лежат в граничном слое A_m .

В ходе эволюции графа всякий слой A_k ($k \geq m+1$) пополняется новой вершиной, когда новая дуга выбирает вершину предшествующего слоя A_{k-1} . Подобным же образом слой A_k теряет вершину, когда новая дуга выбирает ее и вершина переходит в слой A_{k+1} . Число дуг, исходящих из вершины любого слоя A_k , равно m . Число заходящих в нее дуг равно $k - m$.

Число дуг туннеля $B(l, k)$, заходящих в случайно выбранную вершину слоя A_k , лежит между 0 и $k - m$, и в среднем равно $|B(l, k)| / |A_k|$, где $|B(l, k)|$ — число дуг в туннеле $B(l, k)$, $|A_k|$ — число вершин в слое.

При $t \rightarrow \infty$ число вершин $N \rightarrow \infty$, $|A_k|/N \rightarrow Q_k$, $|B(l, k)|/(mN) \rightarrow Q_{l,k}$, где mN — число дуг в графе $G(t)$, $Q_{l,k}$ — вероятность того, что с.в.д. принадлежит $B(l, k)$. С учетом этого составим уравнения баланса и найдем $Q_{l,k}$.

3. Входные туннели

3.1. При добавлении новой дуги (скажем, первой из m дуг новой вершины) ее конец попадает в слой A_k

$$(k \geq m+2) \text{ с вероятностью } P_k = \frac{kQ_k}{\langle k \rangle} = \frac{(m+1)}{(k+1)(k+2)},$$

где $\langle k \rangle = 2m$ — средняя степень вершины графа БА [6]. Выбранная дугой вершина вследствие повышения степени переходит в слой A_{k+1} и стягивает из входного туннеля $B(m, k)$ те дуги, которые в нее заходили, — в среднем $|B(m, k)| / |A_k| = |B(m, k)| / (NQ_k)$ дуг. С учетом вероятности P_k этого события новая дуга стягивает из туннеля $B(m, k)$ в среднем

$$\frac{(m+1)}{(k+1)(k+2)} \cdot \frac{|B(m, k)|}{NQ_k}$$

дуг.

3.2. Число дуг в туннеле $B(m, k)$ уменьшается и тогда, когда конец новой дуги попадает в слой A_m , т.к. при этом вершина, в которую вошла дуга, переходит в слой A_{m+1} и стягивает из входного туннеля те его дуги, которые из нее исходили.

Поскольку новая дуга выбирает вершину в слое A_m случайно, то среднее число исходящих из этой

$$\text{вершины дуг туннеля } B(m, k) \text{ равно } \frac{|B(m, k)|}{|A_m|} =$$

$$= \frac{m|B(m, k)| / (mN)}{|A_m|/N} = \frac{mQ_{m,k}}{Q_m}. \text{ С учетом вероятности}$$

$$P_m = \frac{(m+1)}{(m+1)(m+2)} \text{ этого события и соотношения (2)}$$

среднее число дуг, так стягиваемых из туннеля $B(m, k)$,

$$\text{составляет } P_m \cdot \frac{mQ_{m,k}}{Q_m} = \frac{(m+1)}{(m+1)(m+2)} \cdot \frac{mQ_{m,k}}{2m(m+1)} =$$

$$= \frac{mQ_{m,k}}{2}.$$

3.3. Найдем теперь среднее число дуг, добавляемых в туннель $B(m, k)$ новой дугой графа. С вероятностью

$$P_{k-1} = \frac{(k-1)Q_{k-1}}{\langle k \rangle} = \frac{(m+1)}{k(k+1)} \text{ конец новой дуги попадает}$$

в некоторую вершину слоя A_{k-1} , $k \geq m+2$. Эта вершина переходит в слой A_k и втягивает в туннель $B(m, k)$ в среднем $|B(m, k-1)| / (NQ_{k-1})$ заходящих в нее дуг туннеля $B(m, k-1)$, плюс саму добавленную новую дугу.

С учетом вероятности P_{k-1} этого события новая

$$\text{дуга добавляет в туннель } B(m, k) \text{ в среднем } \frac{(m+1)}{k(k+1)} \cdot$$

$$\left(1 + \frac{|B(m, k-1)|}{NQ_{k-1}}\right) \text{ дуг.}$$

3.4. Т.к. доля дуг туннеля $B(m, k)$ в числе всех дуг стационарного графа $G(t)$ после добавления новой дуги не изменяется, получаем уравнение баланса:

$$\frac{|B(m, k)|}{mN} = \frac{|B(m, k)| + \frac{(m+1)}{k(k+1)} \left(1 + \frac{|B(m, k-1)|}{NQ_{k-1}}\right)}{mN+1}$$

$$\rightarrow \frac{(m+1)}{(k+1)(k+2)} \frac{|B(m,k)|}{NQ_k} - \frac{mQ_{m,k}}{2}, \quad (3)$$

из которого находим:

$$\begin{aligned} \frac{|B(m,k)|}{(mN)} &= \frac{(m+1)}{k(k+1)} \left(1 + \frac{|B(m,k-1)|}{NQ_{k-1}} \right) - \\ &- \frac{(m+1)}{(k+1)(k+2)} \frac{|B(m,k)|}{NQ_k} - \frac{mQ_{m,k}}{2}, \\ Q_{m,k} + \frac{mQ_{m,k}}{2} &= \frac{(m+1)}{k(k+1)} \left(1 + \frac{m|B(m,k-1)|}{mNQ_{k-1}} \right) - \\ &- \frac{(m+1)}{(k+1)(k+2)} \frac{m|B(m,k)|}{mNQ_k}, \\ Q_{m,k} \frac{(m+2)}{2} &= \frac{(m+1)}{k(k+1)} \left(1 + \frac{mQ_{m,k-1}}{Q_{k-1}} \right) - \\ &- \frac{(m+1)}{(k+1)(k+2)} \frac{mQ_{m,k}}{Q_k}, \\ Q_{m,k} &= \frac{(m+1)}{k(k+1)} \left(1 + \frac{mQ_{m,k-1}}{Q_{k-1}} \right) \left(\frac{m+2}{2} + \frac{m(m+1)}{(k+1)(k+2)Q_k} \right)^{-1}, \\ &k \geq m+2. \end{aligned} \quad (4)$$

Подставляя в (4) $Q_k = \frac{2m(m+1)}{k(k+1)(k+2)}$ и $Q_{k-1} = \frac{2m(m+1)}{(k-1)k(k+1)}$, получаем рекуррентную формулу, определяющую всю последовательность $Q_{m,k}$ через $Q_{m,m+1}$:

$$Q_{m,k} = \frac{2(m+1)}{k(k+1)(m+k+2)} + \frac{(k-1)}{(m+k+2)} Q_{m,k-1}, \quad k \geq m+2. \quad (5)$$

Начальный элемент $Q_{m,m+1}$ найдем из специального уравнения баланса для входного туннеля $B(m,m+1)$. Для него, т.е. для $k = m+1$, приемлемы те же рассуждения, которые выше приведены для туннелей $B(m,k)$ при $k \geq m+2$. Единственная поправка состоит в том, что при попадании конца новой дуги в слой A_{k-1} (в данном случае — в слой A_m) в туннель $B(m,k) = B(m,m+1)$ добавляется лишь одна эта новая дуга. Соответствующий член уравнения (3) и выражения (4), учитывающий среднюю добавку $|B(m,k-1)|/(NQ_{k-1})$, при $k = m+1$ исчезает, и получаемое уравнение баланса решается так:

$$\begin{aligned} Q_{m,m+1} &= \frac{(m+1)}{k(k+1)} = \frac{(m+1)}{m+2 + \frac{m(m+1)}{(k+1)(k+2)Q_k}} = \\ &= \frac{(m+1)}{m+2 + \frac{m(m+1)}{(m+1)(m+2)Q_m}} = \\ &= \frac{2}{(m+2)(2m+3)}. \end{aligned} \quad (6)$$

Формулы (6), (5) задают всю последовательность $Q_{m,k}$, $k \geq m+1$.

4. Внутренние туннели

Внутренние туннели $B(l,k)$, $l, k \geq m+1$ начинаются и заканчиваются во внутренних слоях графа. Уравнения баланса для них составляются на основе рассуждений, подобных рассуждениям о входных туннелях, но учитывающих следующие два отличия.

Первое отличие состоит в том, что наряду с рассмотренными прежде возможностями пополнения туннеля $B(l,k)$ при добавлении к графу новой дуги появляется еще одна. Она состоит в том, что когда конец новой дуги попадает в вершину слоя A_{l-1} , эта вершина переходит в слой A_l и переносит в него начала дуг, концы которых уже лежат в слое A_k , и эти дуги пополняют туннель $B(l,k)$. Среднее число таких дуг равно $|B(l-1,k)|/(NQ_{l-1})$. С учетом вероятности P_{l-1} новая дуга добавляет таким способом в

туннель $B(l,k)$ в среднем $P_{l-1} \frac{|B(l-1,k)|}{NQ_{l-1}} = \frac{(m+1)}{l(l+1)}$.

$\frac{|B(l-1,k)|}{NQ_{l-1}}$ дуг. *Второе отличие* сводится к тому, что

сама новая дуга никогда не добавляется во внутренний туннель $B(l,k)$.

Уравнения баланса для внутреннего туннеля получаем, внося в (3) изменения, учитывающие два отмеченных отличия динамики внутренних туннелей, и заменяя индекс m индексом l :

$$\begin{aligned} \frac{|B(l,k)|}{(mN)} &= \frac{1}{(mN)+1} \times \\ &\times \left\{ |B(l,k)| + \frac{(m+1)}{k(k+1)} \frac{|B(l,k-1)|}{NQ_{k-1}} + \frac{(m+1)}{l(l+1)} \frac{|B(l-1,k)|}{NQ_{l-1}} - \right. \\ &- \frac{(m+1)}{(k+1)(k+2)} \frac{|B(l,k)|}{NQ_k} - \left. \frac{(m+1)}{(l+1)(l+2)} \frac{|B(l,k)|}{NQ_l} \right\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Решая уравнение (7) с помощью приемов, использованных при решении уравнения (3), находим:

$$\begin{aligned} Q_{l,k} &= \frac{m(m+1)}{k(k+1)} \frac{Q_{l,k-1}}{Q_{k-1}} + \frac{m(m+1)}{l(l+1)} \frac{Q_{l-1,k}}{Q_{l-1}} - \\ &- \frac{m(m+1)}{(k+1)(k+2)} \frac{Q_{l,k}}{Q_k} - \frac{m(m+1)}{(l+1)(l+2)} \frac{Q_{l,k}}{Q_l}. \end{aligned}$$

И наконец, подставляя сюда выражения (2) для $Q_k, Q_{k-1}, Q_l, Q_{l-1}$, получаем:

$$Q_{l,k} = \frac{(k-1)Q_{l,k-1} + (l-1)Q_{l-1,k}}{2+k+l}, \quad l, k = m+1, m+2, \dots \quad (8)$$

Вместе с решениями (6), (5) и с учетом того, что в граничный слой A_m дуги не заходят, решение (8) рекуррентно определяет вероятности всех туннелей орграфа $G = G(\infty)$ и тем самым матрицу $Q = \|Q_{l,k}\|$ следующим образом:

l	k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	0	0.071429	0.064286	0.050794	0.039683	0.031385	0.025253	0.020668	0.017183	0.014486	0.012363	
3	0	0.017857	0.020238	0.018254	0.015512	0.012987	0.010878	0.009169	0.007792	0.006681	0.005777	
4	0	0.005952	0.007857	0.007835	0.007143	0.006294	0.005478	0.004755	0.004136	0.003612	0.00317	
5	0	0.002381	0.003506	0.003781	0.003652	0.003363	0.00303	0.002704	0.002405	0.002139	0.001905	
6	0	0.001082	0.001732	0.001987	0.002014	0.001927	0.00179	0.001638	0.001487	0.001345	0.001216	
7	0	0.000541	0.000924	0.001116	0.001177	0.001164	0.001111	0.00104	0.000962	0.000885	0.000811	
8	0	0.000291	0.000524	0.00066	0.000722	0.000734	0.000717	0.000685	0.000645	0.000602	0.000559	
9	0	0.000167	0.000313	0.000408	0.00046	0.000479	0.000479	0.000466	0.000445	0.000421	0.000396	
10	0	9.99E-05	0.000195	0.000262	0.000303	0.000323	0.000328	0.000325	0.000315	0.000302	0.000287	
11	0	6.24E-05	0.000126	0.000174	0.000205	0.000223	0.000231	0.000231	0.000227	0.000221	0.000212	
12	0	4.04E-05	8.35E-05	0.000118	0.000142	0.000157	0.000165	0.000168	0.000167	0.000164	0.000159	

Рис. 1. Фрагмент матрицы Q , рассчитанной по формуле (9) при $m=2$ Статистические оценки вероятностей Q_{lk} при $m=2$

Таблица 1

$l \backslash m$	2	3	4	5	6	7	8
2	0,000	0,071	0,065	0,050	0,040	0,032	0,025
3	0,000	0,018	0,021	0,018	0,016	0,013	0,011
4	0,000	0,007	0,009	0,008	0,008	0,007	0,005
5	0,000	0,002	0,003	0,004	0,004	0,003	0,003
6	0,000	0,001	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002
7	0,000	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001

$$Q_{l,k} = \begin{cases} 0, & l \geq m, k = m, \\ \frac{2}{(m+2)(2m+3)}, & l = m, k = m+1, \\ \frac{2(m+1)}{k(k+1)(m+k+2)} + \frac{(k-1)}{(m+k+2)} Q_{l,k-1}, & l = m, k \geq m+2, \\ \frac{(k-1)Q_{l,k-1} + (l-1)Q_{l-1,k}}{(l+k+2)}, & l \geq m+1, k \geq m+1. \end{cases} \quad (9)$$

Расчет матрицы Q выполняется, начиная с заполнения крайнего левого столбца (столбца $k = m$) нулями и расчета элементов верхней строки (строки $l = m$): сначала по формуле (9) вычисляется ее второй слева элемент $Q_{m,m+1}$, затем, через него — следующие вправо элементы $Q_{m,k}$, $k \geq m+2$. После этого построчно, слева направо, рассчитываются элементы следующих строк матрицы.

На рис. 1 приведен начальный фрагмент матрицы Q при $m=2$.

В табл. 1 приведены статистические оценки вероятностей, рассчитанные при $m=2$ с помощью имитационного моделирования графа G . Число N вершин в сгенерированном графе равно 100 тыс.

Сравнение оценок в таблице 1 с вероятностями на рис. 1 подтверждает правильность найденного решения (9).

5. Вероятности захода дуг в приграничный слой

Элементы $Q_{l,m+1}$ столбца $k = m+1$ матрицы Q — вероятности того, что с.в.д. исходит из слоя A_l ($l \geq m$) и заходит в приграничный слой A_{m+1} — можно определить явной общей формулой.

Согласно (9), $Q_{l,m} = 0$, поэтому при $k = m+1$ для всех $Q_{l,k} = Q_{l,m+1}$ имеем:

$$Q_{l,m+1} = \frac{mQ_{l,m} + (l-1)Q_{l-1,m+1}}{l+m+3} = \frac{(l-1)Q_{l-1,m+1}}{l+m+3}, \quad l \geq m+1. \quad (10)$$

Начальный член ряда (10) при $l = m$ известен:

$$Q_{m,m+1} = \frac{2}{(m+2)(2m+3)}. \text{ Для } l = m+1 \text{ из (10) получаем:}$$

$$Q_{m+1,m+1} = \frac{mQ_{m,m+1}}{(2m+4)} = \frac{2m}{(2m+4)(m+2)(2m+3)} = \frac{m}{(m+2)^2(2m+3)}.$$

Переходя далее с помощью (10) к $l = m+2, m+3, \dots, l = m+5$, находим:

$$Q_{m+5,m+1} = \frac{(m+4)Q_{m+4,m+1}}{(2m+8)} = \frac{2m(m+1)(m+3)(m+4)}{(2m+3)(2m+4)(2m+5)(2m+6)(2m+7)(2m+8)}$$

и, вообще, для всякого $l \geq m+1$:

$$Q_{l,m+1} = \frac{2}{(m+2)} \cdot \frac{m(m+1)(m+2) \cdot \dots \cdot (m+s-1)}{(2m+3)(2m+4) \cdot \dots \cdot (2m+s+3)}, \quad s \geq 1. \quad (11)$$

При любых $s \geq m+4$ формула (11) сводится к виду:

$$Q_{l,m+1} = \frac{2}{(m+2)} \cdot \frac{m(m+1)(m+2) \cdot \dots \cdot (2m+2)}{l(l+1) \cdot \dots \cdot (l+m+3)}, \quad (12)$$

и в этом виде, как легко проверить, оказывается справедливой для всех $l \geq m$.

6. Пучки туннелей

Исходящий из слоя A_l пучок туннелей $B(l,*)$ определим как множество всех дуг, исходящих из вершин слоя A_l . Множество всех дуг, заходящих в вершины слоя A_k , образует заходящий пучок $B(*,k)$. Вероятности $Q_{l,*}$ и $Q_{*,k}$ принадлежности с.в.д. пучку $B(l,*)$ и, соответственно, пучку $B(*,k)$ можно вычислять, используя матрицу Q : $Q_{l,*} = \sum_{k \geq m} Q_{l,k}$, $Q_{*,k} = \sum_{l \geq m} Q_{l,k}$. Компактные выражения вероятностей $Q_{l,*}$ и $Q_{*,k}$ попадания в пучки найдем следующим образом.

Для нахождения $Q_{l,*}$ заметим, что число дуг в пучке $B(l,*)$ — дуг, исходящих из слоя A_l , — в среднем равно $Q_l N m$ (т.к. из всякой вершины графа БА исходит m дуг, а в слое A_l находится в среднем $Q_l N$ вершин). Отсюда, с учетом (2),

$$Q_{l,*} = \frac{|B(l,*)|}{mN} = \frac{Q_l N m}{N m} = \frac{2m(m+1)}{l(l+1)(l+2)}. \quad (13)$$

Отсюда видно, в частности, что случайный выбор дуги из множества дуг графа БА эквивалентен случайному выбору вершины из множества его вершин, и последующему случайному выбору исходящей из нее дуги.

Для нахождения $Q_{*,k}$ учтем, что число дуг в пучке $B(*,k)$ — дуг, заходящих в слой A_k , — в среднем равно $(k-m)Q_k N$, т.к. во всякую вершину этого слоя заходит $k-m$ дуг, а в слое A_k находится в среднем $Q_k N$ вершин. Отсюда имеем:

$$Q_{*,k} = \frac{(k-m)Q_k N}{mN} = \frac{(k-m)}{m} \cdot \frac{2m(m+1)}{k(k+1)(k+2)} = \frac{2(k-m)(m+1)}{k(k+1)(k+2)}. \quad (14)$$

7. Свойства случайно выбранной дуги

Перечислим некоторые свойства с.в.д. графа БА, вытекающие из установленного выше распределения $Q = \|Q_{l,k}\|$.

1). Случайный выбор дуги из множества дуг рассматриваемого графа эквивалентен случайному выбору вершины из множества его вершин, и последующему случайному выбору *исходящей* из нее дуги (но не *любой* инцидентной вершине дуги, или инцидентного ей ребра — в стандартной нотации графа БА).

2). Маргинальное распределение начальной степени с.в.д. определяется формулой (13), конечной степени — формулой (14).

3). Начальная и конечная степени с.в.д. — зависящие случайные величины.

4). С учетом (12) математическое ожидание номера слоя, из которого исходит с.в.д., заходящая в приграничный слой, составляет:

$$M(l | k = m+1) = \sum_{l \geq m} l \frac{Q_{l,m+1}}{Q_{*,m+1}} = \frac{1}{Q_{*,m+1}} \sum_{l=m}^{\infty} l \frac{2}{(m+2)} \cdot \frac{m(m+1)(m+2) \dots (2m+2)}{l(l+1) \dots (l+m+3)},$$

где, согласно (14), $Q_{*,m+1} = \frac{2(m+1)}{(m+1)(m+2)(m+3)} =$

$$= \frac{2}{(m+2)(m+3)}. \text{ Поэтому}$$

$$M(l | k = m+1) = \frac{(m+2)(m+3)}{2} \sum_{l=m}^{\infty} \frac{2}{(m+2)} \cdot \frac{m(m+1)(m+2) \dots (2m+2)}{(l+1) \dots (l+m+3)} = \frac{m(m+3)}{(m+2)}.$$

5). Анализ матрицы Q позволяет уточнить асимптотику вероятностей $Q_{l,k}$ при $l, k \rightarrow \infty$. При фиксированном l и $k \rightarrow \infty$ имеем $Q_{l,k} \propto k^{-2}$. При фиксированном k и $l \rightarrow \infty$ имеем $Q_{l,k} \propto l^{-(m+4)}$. При $l, k \rightarrow \infty$ имеет место сходимость $Q_{l,k} \sim 2m(m+1)l^{-2}k^{-2}$ (с нулевой относительной погрешностью).

Примечание. Последнее асимптотическое представление имеет заметную погрешность при конечных (даже при весьма больших) k . Так, при $m=2$ она снижается до 1% лишь при $k \approx 3000$ (если $l=200$), и при $k > 3300$ (если $l=250$). С ростом l при фиксированном k относительная погрешность аппроксимации $Q_{l,k} \approx 2m(m+1)l^{-2}k^{-2}$ быстро ухудшается (т.к. в этом случае $Q_{l,k} \propto l^{-(m+4)}$).

8. Число слоев

Слой A_K с наибольшим номером $K = k_{\max}$ может после появления в нем первой вершины быть выбран с вероятностью $K|A_K| / \sum_j k_j = K / (2mN)$ одной из m дуг новой добавляемой в граф вершины. На один шаг выращивания графа вероятность такого выбора возрастает в m раз и составляет величину $P_K = K / (2N)$. Этот выбор означает увеличение максимального номера слоя K на единицу. Следовательно, $dK = P_K$, т.е. $dK \propto K/N$ и $K \propto N^{1/2}$.

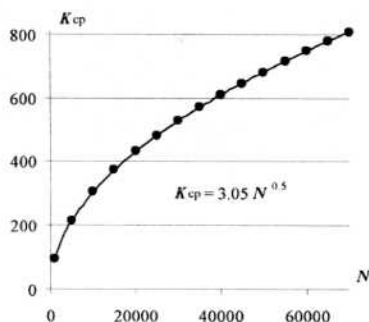
В действительности при выращивании графа всегда возникает ситуация, когда выбранная новой дугой вершина является единственной вершиной последнего слоя A_K , и, уходя в следующий новый слой A_{K+1} , оставляет предыдущий слой пустым. С ходом времени закрепляется ситуация, когда несколько предпоследних слоев становятся пустыми, а последний содержит ровно одну вершину. При этом вероятность выбора новой дугой вершины последнего слоя становится выше вероятности пополнения предшествующего ему слоя.

При $m=2$ имеем $K_{cp} \approx 3.05\sqrt{N}$ (рис. 2, непрерывная линия). Маркерами на рис. 1 отмечены оценки K_{cp} , вычисленные методом Монте-Карло.

9. Коэффициент кластеризации

Матрица Q точно характеризует свойства с.в.д. графа БА и позволяет определить ряд важных его характеристик, знание которых необходимо для адекватного моделирования и анализа больших сетевых структур. В частности, эта матрица однозначно определяет аналогичную матрицу, описывающую случайно выбранное ребро (в традиционной нотации графа БА, не использующей ориентированных дуг). Матрица Q позволяет определить свойства локальных окрестностей вершин, выбираемых случайно в различных слоях, средний ранг дуги (разность ее конечных степеней), исходящей из данного слоя, найти среднее число подграфов заданной конфигурации и т.д. В качестве иллюстрации приведем без вывода найденную на основе матрицы Q формулу коэффициента кластеризации — одного из важнейших структурных показателей графа БА.

Коэффициент кластеризации C определяется как отношение утроенного числа Δ_T треугольников в

Рис. 2. Зависимость K_{cp} от N при $m=2$

графе к числу «вилкок» (или путей длины 2): $C = 3n_v / n_v$, где N — число всех вершин графа [9, 10]. Для графа БА аналитическое выражение этого важного показателя долгое время не удавалось найти [8]. Применение уравнений баланса с учетом асимптотики вероятностей дуг $Q_{i,k} \sim 2m(m+1)l^{-2}k^{-2}$ позволило установить, что для графа БА

$$C = \frac{(m-1)(\ln N)^2}{8N} + O\left(\frac{\ln N}{N}\right),$$

и, таким образом

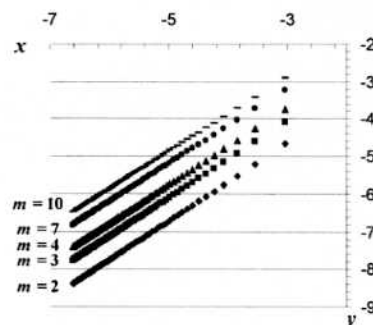
$$C \sim \frac{(m-1)(\ln N)^2}{8N}. \quad (15)$$

При выводе этой формулы использован факт степенной зависимости среднего числа слоев графа от числа его вершин.

На рис. 3 в логарифмической шкале изображены зависимости от N коэффициента кластеризации (здесь $y = \ln C$), рассчитанного с помощью имитационного моделирования графа БА. По оси x отложен логарифм $x = \ln[(\ln N)^2 / N]$. Форма графиков (независимо от значений C_m , известных лишь приближенно) подтверждает функциональную связь (15), установленную теоретически.

10. Заключение

В статье ставится и решается задача нахождения фундаментальной матрицы Q , определяющей основные конфигурационные свойства и характеристики scale-free графа Барабаши-Альберт (графа БА). Матрица Q представляет собой распределение конечных степеней для случайно выбранной дуги ориентированного графа БА, получаемого путем взаимнооднозначной замены ребер обычного графа БА дугами. Рекуррентные формулы, определяющие матрицу Q , найдены путем составления и решения уравнений баланса для стационарного орграфа БА. На основе уравнений баланса и асимптотических свойств мат-

Рис. 3. Логарифмированная функция $C(N)$

рицы Q получен ряд ранее неизвестных аналитических выражений для конфигурационных характеристик графа БА, в том числе — для его коэффициента кластеризации.

Библиографический список

1. Barabasi, Albert-Laszlo and Albert, Reka. «Emergence of scaling in random networks». Science, 286:509-12, October 15, 1999.
2. Барабаши А., Бонабо Э. Безмасштабные сети // В мире науки. — 2003. — № 8. — С. 55 — 63.
3. Newman M. E. J. The structure and function of complex networks SIAM Review 45, 167 — 256 (2003).
4. Barabasi, Albert-Laszlo The Architecture of Complexity, IEEE CONTROL SYSTEMS MAGAZINE, AUGUST 2007.
5. Aaron Clauset, Cosma Rohilla Shalizi, M. E. J. Newman Power-law distributions in empirical data SIAM Review, submitted on 7 Jun 2007 (v1), last revised 2 Feb 2009 (this version, v2) in press.
6. Задорожный В.Н., Юдин Е.Б. Статистически однородные случайные графы: определение, генерация, применение. — Омский научный вестник (настоящий выпуск).
7. Konstantin Klemm, Victor M. Eguiluz Highly clustered scale-free networks Phys. Rev. E 65, 036123 (2002).
8. Albert R., Barabasi A.-L. Statistical mechanics of complex networks // Rev. Mod. Phys. — 2002. — V. 74. — P. 42 — 97.
9. R.D. Luce and A.D. Perry (1949). «A method of matrix analysis of group structure». Psychometrika 14 (1): 95 — 116.
10. M. E. J. Newman The structure and function of complex networks SIAM Review 45, 167 — 256 (2003).

ЗАДОРЖНЫЙ Владимир Николаевич, кандидат технических наук, доцент кафедры «Автоматизированные системы обработки информации и управления».

Адрес для переписки: e-mail zwn@yandex.ru

ЮДИН Евгений Борисович, аспирант кафедры «Автоматизированные системы обработки информации и управления».

Адрес для переписки: e-mail forrts@mail.ru

Статья поступила в редакцию 04.09.2009 г.

© В. Н. Задорожный, Е. Б. Юдин

Книжная полка

Демидович, Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу [Текст]: учеб. пособие для вузов / Б. П. Демидович. — М.: АСТ: Астрель, 2009. — 558 с. — ISBN 978-5-17-010062-0. — ISBN 978-5-271-03601-9.

Сборник содержит около 5000 задач и упражнений по важнейшим разделам математического анализа: введение в анализ; дифференциальное исчисление функций одной переменной; неопределенный и определенный интегралы; ряды; дифференциальное исчисление функций нескольких переменных; интегралы, зависящие от параметра; кратные и криволинейные интегралы. Ко всем задачам даны ответы, к наиболее трудным — указания по решению.

ИЗОМОРФИЗМ ПЛОТНЫХ И ДИСКРЕТНЫХ ПРОСТРАНСТВ ГИЛЬБЕРТА В ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКЕ СИГНАЛА

В данной статье рассматривается изоморфизм плотных и дискретных пространств Гильберта. Исследуются конкретные примеры и причины нарушения изоморфизма. Вводятся критерии изоморфности. Вводится понятие модифицированной дельта-функции.

Ключевые слова: ЦОС, изоморфизм, ДПФ, цифровые фильтры, дельта-функция.

Под цифровой обработкой сигнала (ЦОС) обычно понимают набор математических операций над последовательностями дискретных значений, то есть объектом ЦОС является последовательность. Но используют ЦОС чаще всего для обработки непрерывных функций (измерения, радиосвязь и так далее). Вследствие этого последовательности (дискретные значения) пытаются обрабатывать так, как обрабатываются в сходных ситуациях непрерывные функции. Но невозможно обрабатывать последовательности так же, как функции. Это совершенно разные математические объекты. Поэтому результаты операций при работе с дискретными значениями сигнала и результаты аналогичных операций над непрерывной функцией могут серьезно расходиться. В этом случае говорят о нарушении изоморфизма между плотным пространством функций и дискретным пространством последовательностей. Рассмотрим некоторые часто встречающиеся примеры того, что определенные операции над последовательностями и аналогичные операции над функциями приводят к различным результатам.

Как известно, функцию $x(t)$ с периодом P возможно разложить в ряд Фурье. Коэффициенты этого ряда находятся при помощи формулы [1]:

$$X(k) = \frac{1}{P} \int_0^P x(t) e^{-j \frac{2\pi}{P} kt} dt. \quad (1)$$

Коэффициенты разложения периодической последовательности $x(n)$ находятся при помощи формулы дискретного преобразования Фурье (ДПФ):

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j \frac{2\pi}{N} nk}, \quad (2)$$

где N — длина последовательности.

Очевидно, что если $x(t)$ — четная функция (симметричная относительно нуля), то коэффициенты Фурье строго действительны. Верно и обратное утверждение. Но из четности (симметричности) последовательности действительность отсчетов ДПФ уже не следует. Так, симметричной последовательности $x(n) = \{1, 1, 5, 1, 1\}$ соответствует комплексное ДПФ:

$$X(k) = \{9.0000, -3.2361 - j2.3511, 1.2361 + j3.8042, 1.2361 - j3.8042, -3.2361 + j2.3511\},$$

а несимметричной последовательности $x(n) = \{5, 1, 1, 1, 1\}$, наоборот, соответствует действительное ДПФ: $X(k) = \{9, 4, 4, 4, 4\}$.

Рассмотрим следующий пример. Для любой линейной системы, работающей с аналоговыми сигналами справедливо утверждение: для того, чтобы система имела линейную фазу необходимо и достаточно, чтобы ее импульсная характеристика имела ось симметрии [2].

Но данное утверждение ложно в отношении последовательностей. Для последовательностей возможно доказать только достаточность этого утверждения — для линейности фазы достаточно симметричности последовательности.

Покажем, что существуют системы с несимметричными импульсными характеристиками, но, тем не менее, с линейной фазой. Возьмем строго симметричную импульсную характеристику, например, $h(n) = \{1, 2, 3, 3, 2, 1\}$. Так как последовательность $h(n)$ симметрична, то фаза системы линейна, и, следовательно, ее частотную характеристику можно представить в виде [3]: $H(\omega) e^{-j\omega T_1}$, где $H(\omega)$ — строго действительная величина. Теперь получим из $h(n)$ новую импульсную характеристику при помощи задержки на целое число отсчетов (время T_2): $h_1(n) = \{0, 0, \dots, 1, 2, 3, 3, 2, 1\}$. Эта импульсная характеристика уже не является симметричной, но фаза $F_1(\omega)$ такой системы все еще остается линейной. Докажем это.

$$H_1(\omega) = H(\omega) e^{-j\omega T_1} e^{-j\omega T_2} = H(\omega) e^{-j\omega(T_1 + T_2)}$$

$$\begin{aligned} F_1(\omega) &= \arctg \frac{\text{Im}(H_1(\omega))}{\text{Re}(H_1(\omega))} \\ &= \arctg \frac{H(\omega) \sin(\omega(T_1 + T_2))}{H(\omega) \cos(\omega(T_1 + T_2))} = -\omega(T_1 + T_2). \end{aligned} \quad (3)$$

Что и требовалось доказать.

Наконец, опишем весьма необычный эффект, возникающий при интерполяции. Для этого возьмем КИХ фильтр, с импульсной характеристикой $h(n)$, изображенный на рис. 1.

Как видно из рисунка, импульсная характеристика фильтра отлична от нуля только на промежутке времени $[T_0, T_1]$. Вне этого отрезка она тождественно равна нулю. В момент времени T_0 на фильтр подается воздействие в виде дельта-последовательности $\delta(n) = \{1, 0, 0, 0, \dots\}$, а на выходе фильтра мы имеем конечную

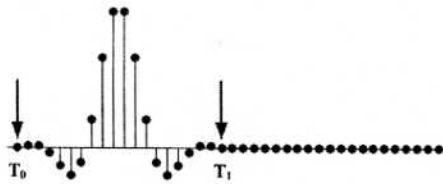


Рис. 1. Импульсная характеристика КИХ фильтра

реакцию $h(n)$, которая длится до момента T_1 . Пока никаких проблем нет. Но если провести интерполяцию импульсной характеристики КИХ фильтра по интерполяционной формуле Котельникова (например, в десять раз — между двумя отсчетами добавим девять новых) [4]:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x(nT) \frac{\sin \frac{\pi}{T}(t - nT)}{\pi(t - nT)}, \quad (4)$$

то получим следующую картину: импульсная характеристика КИХ фильтра перестанет быть конечной! После момента времени T_1 у импульсной характеристики появляется продолжение (рис. 2).

Но самое интересное заключается в том, что у импульсной характеристики появляется также и предыстория (рис. 3) — ненулевые значения до момента времени T_0 (момента подачи входного воздействия).

Другими словами, получается, что сигнал на выходе системы опережает сигнал на входе.

Причина проблем с изоморфизмом, как отмечалось выше, состоит в том, что разработчик не всегда может найти для пространства последовательностей аналогию в пространстве функций (имеется в виду вектор пространства, операция над векторами и так далее). Следовательно, должны существовать критерии изоморфности объектов пространства последовательностей и пространства функций.

Рассмотрим два критерия изоморфности — изоморфность в широком смысле и изоморфность в узком смысле.

Предположим, имеются два пространства Гильберта [5]: пространство функций $X = \{x(t)\}$ и пространство последовательностей $X_d = \{x(nT)\}$. Векторы пространства X_d получают из векторов пространства X при помощи дискретизации с периодом T .

Определение 1: вектор пространства X_d считается изоморфным вектору пространства X в широком смысле, если

$$\lim_{T \rightarrow 0} x(nT) = x(t). \quad (5)$$

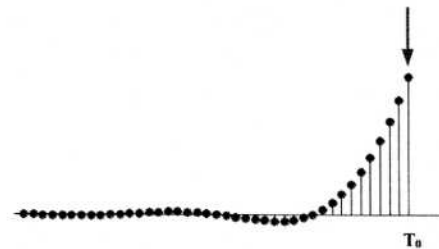
Определение 2: операция F_d над вектором пространства X_d считается изоморфной операции F над вектором пространства X в широком смысле, если

$$\lim_{T \rightarrow 0} F_d[x(nT)] = F[x(t)]. \quad (6)$$

Для иллюстрации введенного понятия рассмотрим алгоритм измерения энергии сигнала. Для этого введем определение энергии функции (аналогового сигнала) на интервале $t \in [a, b]$:

$$E_a = \int_a^b x^2(t) dt. \quad (7)$$

и энергии последовательности (дискретного сигнала) на том же интервале:

Рис. 2. Интерполированная характеристика КИХ фильтра после момента времени T_1 Рис. 3. Интерполированная характеристика КИХ фильтра до момента времени T_0

$$E_d = \sum_{n=\frac{a}{T}}^{n=\frac{b}{T}} x^2(nT). \quad (8)$$

Очевидно, что если период дискретизации T взять, например, в два раза меньше, то энергия последовательности E'_d , считаемая по формуле (8), увеличится, так как увеличится и количество отсчетов:

$$E'_d = \sum_{n=\frac{a}{T}}^{n=\frac{b}{T}} x^2(nT) + \sum_{n=\frac{a}{T}}^{n=\frac{b}{T}} x^2\left(T\left(n + \frac{1}{2}\right)\right) = E_d + E_d^*, \quad (9)$$

где E_d^* — энергия новых отсчетов.

Таким образом, очевидно, что преобразование (8) не изоморфно преобразованию (7), так как при уменьшении интервала дискретизации T энергия последовательности $x(nT)$ пропорционально возрастает и не стремится к энергии функции.

Предложим преобразование, которое будет изоморфным в широком смысле.

$$E_d = T \sum_{n=\frac{a}{T}}^{n=\frac{b}{T}} x^2(nT). \quad (10)$$

В соответствии с критерием изоморфности и определением интеграла Римана имеем:

$$E_d = \lim_{T \rightarrow 0} \sum_{n=\frac{a}{T}}^{n=\frac{b}{T}} x^2(nT) T = \int_a^b x^2(t) dt = E_a = E. \quad (11)$$

Таким образом, преобразования (10) и (7) изоморфны.

Из изоморфности в широком смысле не следует, что результаты аналогичных операций для пространства последовательностей и пространства функций будут совпадать. Они будут совпадать только в пределе, при $T \rightarrow 0$. Это не всегда удобно. Поэтому для операций предлагается ввести также критерий изоморфности в узком смысле:

Определение 3: операция F_d над вектором пространства X_d считается изоморфной операции F над вектором пространства X в узком смысле, если:

$$F_d[x(nT)] = F[x(t)].$$

Для иллюстрации введенного понятия рассмотрим алгоритм измерения энергии сигнала для функций с ограниченным спектром, по Котельникову и последовательностей, полученных из данных функций при помощи дискретизации. То есть докажем изоморфность формулы

$$E_a = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt \quad (12)$$

и формулы

$$E_d = T \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x^2(nT). \quad (13)$$

Разложим в формуле (12) функцию $x(t)$ по формуле (4):

$$E_a = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x(nT) \frac{\sin \frac{\pi}{T}(t-nT)}{\frac{\pi}{T}(t-nT)} \right)^2 dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{l=-\infty}^{l=+\infty} x(lT) \frac{\sin \frac{\pi}{T}(t-lT)}{\frac{\pi}{T}(t-lT)} \right) \left(\sum_{r=-\infty}^{r=+\infty} x(rT) \frac{\sin \frac{\pi}{T}(t-rT)}{\frac{\pi}{T}(t-rT)} \right) dt. \quad (14)$$

После перемножения многочленов в скобках получается сумма членов вида:

$$x(lT)x(rT) \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\sin \frac{\pi}{T}(t-lT)}{\frac{\pi}{T}(t-lT)} \right] \left[\frac{\sin \frac{\pi}{T}(t-rT)}{\frac{\pi}{T}(t-rT)} \right] dt. \quad (15)$$

Так как функции в скобках являются ортогональными, то все члены, для которых выполняется условие $l \neq r$, равны нулю, в а случае, когда $l = r = n$, получается табличный интеграл [6]:

$$x^2(nT) \frac{T}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\sin \frac{\pi}{T}(t-nT)}{\frac{\pi}{T}(t-nT)} \right]^2 d \frac{\pi}{T}(t-nT) =$$

$$x^2(nT) \frac{T}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx = x^2(nT) \cdot T. \quad (16)$$

Формула (12) приобретает вид:

$$E_a = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt = T \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x^2(nT) = E. \quad (17)$$

Что и требовалось доказать.

Начнем решение проблем изоморфизма в том порядке, как они были поставлены.

Действительность спектров несимметричных последовательностей объясняется неизоморфностью стандартной формулы ДПФ. ДПФ, как известно, разлагает исходную последовательность на последовательности косинусов (действительная часть спектра) и последовательности синусов (мнимая

часть) [7]. Но если в формуле вычисления коэффициентов разложения функции (1) косинус — это строго симметричная (четная) функция, то в формуле ДПФ (2) последовательность косинуса не симметрична. Например, если мы возьмем последовательность косинуса с частотой в четверть частоты дискретизации, то получим следующее:

$$\{1, 0, -1, 0\}. \quad (18)$$

А так как за действительную часть спектра отвечают несимметричные последовательности, то симметричную последовательность по ним разложить невозможно. Поэтому появляется мнимая часть спектра. Вывод: при традиционном ДПФ базисные последовательности не изоморфны базисным.

Казалось бы, для решения проблем изоморфизма, достаточно сдвинуть все отсчеты, например, на половину T (интервала дискретизации), но возникает вопрос: а как сдвигать на половину T дельта-последовательность $\{1, 0, 0, 0, \dots\}$? Как это сделать с точки зрения изоморфности мы рассмотрим позже.

Линейность фазы КИХ фильтров с несимметричной импульсной характеристикой объясняется неправильной формулировкой заявленного утверждения. Ниже приводится правильная формулировка.

Теорема: последовательность $x(n)$ имеет линейную фазу на интервале $]-\pi, \pi[$ тогда и только тогда, когда функция $x(t)$, получаемая из интерполирующей формулы Котельникова (4), имеет хотя бы одну ось симметрии.

Сначала докажем условие достаточности — если $x(t)$ имеет ось симметрии, то последовательность $x(n)$ имеет линейную фазу.

Доказательство.

1. Функция $x(t)$ имеет ось симметрии.
2. Следовательно, спектр этой функции $X(\omega)$ имеет линейную фазу.

3. Спектр функции $x(t)$ на интервале $]-\pi, \pi[$ в точности соответствует спектру последовательности $x(n)$.

4. Следовательно, спектр последовательности имеет линейную фазу на интервале $]-\pi, \pi[$.

Что и требовалось доказать.

Докажем условие необходимости — если последовательность $x(n)$ имеет линейную фазу, то функция $x(t)$ имеет хотя бы одну ось симметрии.

Доказательство.

1. Спектр последовательности $x(n)$ имеет линейную фазу.

2. Спектр функции $x(t)$ на интервале $]-\pi, \pi[$ в точности соответствует спектру последовательности $x(n)$.

3. Следовательно, спектр функции $x(t)$ на интервале $]-\pi, \pi[$ имеет линейную фазу, а сама функция $x(t)$ имеет ось симметрии.

Что и требовалось доказать.

Наконец, чтобы понять, что происходит с причинностью, необходимо разобраться, что же представляет собой дельта-последовательность на самом деле.

Для того, чтобы понять, что такое дельта-последовательность, необходимо сначала ответить на следующий вопрос: почему при дискретизации «обычной» функции мы имеем последовательность из значений этой функции в моменты дискретизации, а при дискретизации дельта-функции Дирака [8] мы имеем нечто иное — дельта последовательность $\{1, 0, 0, \dots\}$ [9], хотя по аналогии можно было ожидать последовательность вида $\{+\infty, 0, 0, \dots\}$.

Ответ достаточно прост: мы не можем дискретизировать дельта-функцию Дирака. Дискретизации подлежат только функции со спектром ограниченным

по Котельникову. А спектр дельта-функции Дирака бесконечный и, следовательно, неограниченный. Таким образом, необходимо найти среди сигналов с ограниченным спектром аналогию дельта-функции Дирака.

Дельта-функция Дирака $\delta(t)$ определяется из своего фильтрующего (стробирующего) свойства [10]:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau. \quad (19)$$

Свертка функций $x(t)$ и $\delta(t)$ во временной области эквивалентна произведению спектров этих функций в частотной области. Но если $x(t)$ имеет спектр $X(\omega)$, ограниченный по Котельникову отрезком на оси частот $[-\Omega, \Omega]$, то возможно подобрать функцию $\delta_m(t)$ с таким спектром $\Lambda(\omega)$, что будет выполняться соотношение:

$$X(\omega) = X(\omega) \Lambda(\omega). \quad (20)$$

В том случае, если

$$\Lambda(\omega) = \begin{cases} 1, \omega \in [-\Omega, \Omega] \\ 0, \omega \notin [-\Omega, \Omega] \end{cases}, \quad (21)$$

то

$$\delta_m(t) = \frac{\Omega \sin(\Omega t)}{\pi \Omega t} = \frac{1}{T} \frac{\sin(\frac{\pi}{T} t)}{\frac{\pi}{T} t}. \quad (22)$$

Очевидно, что $\delta_m(t)$ является модифицированной дельта-функцией: с одной стороны, она ограничена по Котельникову, а с другой — в отношении нее истинно соотношение (19) для любой функции $x(t)$, также ограниченной по Котельникову.

Так как $\delta_m(t)$ является обычной функцией sinc, то становится понятен парадокс нарушения принципа причинности. Собственно, никакого нарушения принципа причинности нет. Просто надо учитывать, что функция sinc не является финитной, то есть не имеет начала. Соответственно, отклик на такую функцию тоже начала не имеет.

В заключение приведем выводы.

При цифровой обработке разработчик может столкнуться с так называемыми проблемами изоморфизма, которые возникают в случае механического переноса алгоритмов над функциями на последова-

тельности. Основной причиной этих проблем является попытка применения математического аппарата Гильбертовых пространств к векторам, данным пространствам не принадлежащим, как это имеет место быть при попытках использования дельта-функции Дирака, при работе с функциями, ограниченными по Котельникову. Для решения этой проблемы предложена модифицированная дельта-функция, которая, с одной стороны, входит в пространство функций, ограниченных по спектру, а с другой — обладает фильтрующим (стробирующим) свойством в отношении всех функций этого пространства.

Библиографический список

1. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров: Определения, теоремы, формулы — СПб.: Лань, 2003. — 832 с.
2. Опенгейм А., Шафер Р. Цифровая обработка сигналов. — М.: Техносфера, 2006. — 856 с.
3. Романюк Ю. А. Основы цифровой обработки сигналов. В 3-х ч. Ч. 1. Свойства и преобразования дискретных сигналов: учеб. пособие. — 2-е изд., перераб. — М.: МФТИ, 2007. — 332 с.
4. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. — М.: Мир, 1978. — 835 с.
5. Морен К. Методы гильбертова пространства. — М.: Мир, 1965. — 570 с.
6. Двайт Г. Б., Таблицы интегралов и другие математические формулы. — 2-е изд., исправ. — М.: Наука, 1966. — 228 с.
7. Романюк Ю. А. Дискретное преобразование Фурье в цифровом спектральном анализе: учеб. пособие. — М.: МФТИ, 2007. — 120 с.
8. Дирак П. А. М. Принципы квантовой механики. — М.: Наука, 1979. — 408 с.
9. Капеллини В., Константиноидис А. Дж., Эмилиани П. Цифровые фильтры и их применения. — М.: Энергоиздат, 1983. — 360 с.
10. Сергиенко А. Б. Цифровая обработка сигналов: учеб. пособие. — СПб.: Питер, 2003. — 608 с.

ГРИЦУТЕНКО Станислав Семёнович, кандидат технических наук, доцент кафедры «Системы передачи информации».

Адрес для переписки: st256@mail.ru

Статья поступила в редакцию 15.09.2009 г.

© С. С. Грицутенко

Книжная полка

Шипачев, В. С. Курс высшей математики [Текст]: учеб. для вузов / В. С. Шипачев; под ред. А. Н. Тихонова. — 4-е изд., испр. — М.: ОНИКС, 2009. — 599, [1] с.: рис. — ISBN 978-5-488-02067-2.

В учебнике излагается материал по важным разделам высшей математики, таким, как сведения из теории множеств и теории вещественного числа, теория пределов последовательностей и функций, основы дифференциального и интегрального исчисления функций одной или нескольких переменных, элементы аналитической геометрии на плоскости и в пространстве, некоторые вопросы линейной и векторной алгебры, теории рядов и теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Существенное внимание уделено решению типовых примеров и задач теоретического и прикладного характера.

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ПРОСТРАНСТВА И ВРЕМЕНИ: РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОЙ ЛОКАЛИЗАЦИИ КВАНТОВЫХ ОБЪЕКТОВ

В предлагаемой работе проведён анализ фундаментальных пространственно-временных и энергетических соотношений, характеризующих сотворение и эволюцию Вселенной. В основе анализа лежит концепция дискретности физического Пространства и Времени.

Ключевые слова: хаос, дискретность, непрерывность, квант Времени, квант Пространства.

В создании и эволюции научных теорий существенную роль играют основополагающие идеи. В нашем случае, имеющим отношение к проблеме Пространства – Времени, не математическое обоснование создаваемой теории, а именно идея является ее началом. Позднее, как показывает история развития науки, в естественнонаучных учениях идея принимает математическую форму количественной теории и затем проходит экспериментальную проверку.

Для понимания заявленной темы важно напомнить, что в истории науки неоднократно отмечены факты, когда философские идеи превращались в конкретные научные гипотезы, обретали точное количественное выражение, находили широкое практическое подтверждение и техническое воплощение. Яркими примерами таких философских суждений, ставшими исходными идеями для естествознания, являются атомистическая идея строения материи, идеи о постоянстве движения и о спонтанных столкновениях атомов. Такие примеры говорят не только об эвристической роли и практическом значении философии для конкретных наук, но и об изначальном единстве и взаимосвязи философии и конкретных наук. И вряд ли современная постнеклассическая «одежда» научного знания разрушит эту исторически сложившуюся их взаимосвязь.

Но если такая взаимосвязь реально существует, то необходимо признать, что не только философские идеи превращаются в конкретные научные гипотезы, но и конкретные научные открытия, в свою очередь, могут порождать идеи и глубокие обобщения в философии. Так, наблюдая «красное» смещение галактических спектров, то есть уменьшение частоты галактических излучений, астрономы и физики делают далеко идущий космологический вывод о разбегании Галактик и философское обобщение о расширении Вселенной в целом.

Столкновение с философией позволяет выдвигать новые гипотезы в конкретных научных исследованиях и соотносить их с действительностью. В книге М. Бунге «Философия физики» справедливо утверждается, что «любой физик, пытающийся уяснить смысл своей собственной работы, обязательно сталкивается с философией, хотя и не всегда осознаёт это».

В данной статье автором представлен анализ проблем, относящихся к основаниям философии и физики, а именно: 1) существуют ли пределы пространственно-временной локализации и 2) как связаны фундаментальные свойства Пространства и Времени с физическими законами, и вытекающее из этого анализа доказательство дискретности Пространства и Времени.

Спектр исследований пространственной и временной форм существования материи на микроуровне выходит за рамки континуальных концепций. В этих исследованиях наблюдается определенная диалектика: используются не только категории непрерывности, но и категории дискретности. Другими словами, признается, что одни лишь континуальные представления не в состоянии воспроизвести все богатство и специфику пространственно-временных форм, свойств и отношений микромира.

Идея дискретности Пространства и Времени как альтернатива идее непрерывности Пространства и Времени известна со времен древнегреческих философов. В разработке этой идеи принимали участие и современные философы и физики. Однако, несмотря на неизменную актуальность применения категории дискретности в описании структуры материальных образований, рабочей концепцией все же всегда оставалась концепция непрерывности.

Эксперимент не может обосновать абстракцию бесконечной делимости, ибо любой опыт конечен и не может поэтому доказать бесконечную делимость. Но эксперимент может опровергнуть абстрактную непрерывность в силу того, что в опыте эта абстракция соотносится с материальными объектами, а не с мыслительной способностью бесконечно делить неделимые до бесконечности в действительности сущности. «Дурная бесконечность» как реальность давно отвергнута не только в философии.

Создано несколько моделей дискретного Пространства и дискретного Времени, в которых используются логические умозаключения из гипотетических предпосылок [1, 2]. Необходимо отдать должное предпринятым и предпринимаемым усилиям в этой области, но следует отметить, что предпочтение в рассуждениях о квантах Пространства и Времени

отдавалось чисто интуитивным, умозрительным соображениям или философским догадкам. Низкая физическая содержательность некоторых предлагаемых моделей дискретности Пространства и Времени приводит к многочисленным спекуляциям, которые можно трактовать как обманчивые суждения беспорядочного воображения. В качестве примера приводятся соображения, лежащие в основе так называемой геометрической интуиции строения вакуума. Вот эти, цитируемые по [1], соображения: «Переход через особую точку сверхпространства, то есть смена топологии пространства, сугубо квантовый процесс. Но на малых расстояниях сколь угодно сильные флуктуации метрики ведут к обилию соседних Вселенных с мелкими топологическими ручками, которые можно сравнить с ручками чайников или гирь, так что все время будут осуществляться переходы из одного мелкомасштабного многосвязного состояния в другое подобное состояние, которые называются кипением топологической пены». Таков, согласно идеям Wheeler'a, геометрический фон физического вакуума. Как видно, в данном примере явно ощущается отсутствие «бритвы Оккама», хотя в этом случае её применение совершенно необходимо. Подобные недостатки свойственны и некоторым другим моделям (или составным частям) дискретного Пространства и дискретного Времени.

В предлагаемой работе в рассмотрение вводится теоретическая гипотеза о дискретности Времени и физического Пространства с последующим её доказательством. Основополагающая идея доказательства выдвинутой гипотезы состоит в том, что частота излучения энергии имеет предельную величину ν_{\max} для всей Вселенной и эту величину ν_{\max} никогда не удастся превзойти. Грандиозность масштаба и фундаментальность следствий для квантовой физики, космогонии и космологии, сопутствующих этой гипотезе, были впервые оценены и изложены автором в [3], [5].

Рассмотрим рассуждения, лежащие в основе доказательства высказанной гипотезы в логической последовательности. В качестве важного аргумента, который убеждает в состоятельности предъявляемого доказательства, укажем на ограничение скорости V материальных объектов. Почему скорость материальных объектов ограничена некоторой предельной величиной V_{\max} ? Это происходит по следующей причине. Выражение для кинетической энергии $E_{\text{кин}}$ материальных объектов имеет вид

$$E_{\text{кин}} = \frac{m \cdot V^2}{2}, \quad (1)$$

где m — масса материального объекта, V — скорость материального объекта.

Кинетическая энергия ограничена и не может быть бесконечно большой, в противном случае имеется противоречие с фундаментальным законом сохранения и превращения энергии. Отсюда следует, что скорость V материального объекта также должна быть ограничена некоторой величиной V_{\max} , $V \leq V_{\max}$.

Заметим, что аналогичное рассуждение относится и к массе m материального объекта, и к температуре T материального объекта.

Конкретная численная величина V_{\max} для Вселенной в существующей физической теории определена как

$$V_{\max} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \cdot \mu_0}}, \quad (2)$$

где ϵ_0 , μ_0 — характеристики физического Пространства (вакуума), и идентифицирована как скорость света в вакууме ($c = 3 \cdot 10^8$ м/с).

В квантовой физике определена энергия ϵ светового кванта в виде

$$\epsilon = h \cdot \nu, \quad (3)$$

где h — постоянная Планка, ν — частота колебаний.

В свое время Планк ввел в рассмотрение гипотезу световых квантов, энергия которых определялась по формуле (3), для устранения так называемой «ультрафиолетовой катастрофы», но Планк не увидел другую, но не менее драматическую, катастрофу уже для основ квантовой физики, связанную с применением формулы (3). Из формулы (3) следует, что если $\nu \rightarrow \infty$, то и $\epsilon \rightarrow \infty$. Другими словами, энергия светового кванта при этом условии может быть бесконечно большой, что совершенно неприемлемо с физической точки зрения, и связано это с нарушением фундаментального закона сохранения и превращения энергии. Единственный выход из этой ситуации состоит в том, чтобы принять как физическую реальность существования в Природе предельно допустимой частоты излучения $\nu \rightarrow \nu_{\max}$, отсюда и энергия световых квантов стремится к предельно допустимому значению $\epsilon \rightarrow \epsilon_{\max} = h \cdot \nu_{\max}$.

Итак, поскольку ϵ ограничена по величине некоторым предельным значением ϵ_{\max} , а ϵ_{\max} не может быть бесконечно большой величиной, иначе будет нарушен фундаментальный закон сохранения и превращения энергии, то отсюда следует, что частота колебаний ν ограничена величиной ν_{\max} .

Величина ν_{\max} есть предельная частота колебаний для световых квантов. О конкретном числовом значении ν_{\max} говорить преждевременно, но важно осознать, что в Природе величина ν_{\max} объективно существует, так же как объективно существует величина $V_{\max} = c$.

Отсюда следует, что

$$\nu_{\max} = \frac{\epsilon_{\max}}{h}. \quad (4)$$

Эта экстраполяция (под экстраполяцией понимается прогнозирование неизвестных значений функции путём продолжения функциональной зависимости за границы области известных значений аргумента и, следовательно, самой функции), этот незначительный математический приём станет одним из наиболее значительных и важных вкладов в науку, когда-либо сделанных в истории физики. В истории физики не было примера, когда столь незначительная математическая операция имела бы столь далеко идущие физические и философские следствия.

В поисках логического укрепления предложенной гипотезы автор выдвинул представление о квантах Времени t_{\min} и квантах физического Пространства λ_{\min} и тем самым инициировал развитие нового этапа квантовой теории; более того, из этой экстраполяции вытекают определённые следствия, которые решающим образом скажутся на самих основах физики, равно как и на их эпистемологических предпосылках.

Ради исторической точности следует заметить, что подобная ситуация в физике уже однажды была, и эта ситуация была связана с выводом закона излучения, получившим позднее имя Планка. Конкретно говоря, Планк принял вторую производную от энтропии S по средней энергии U для осциллятора в виде интерполяционной формулы [4]

$$\frac{\partial^2 S}{\partial U^2} = \frac{a}{U(U+d)}, \quad (5)$$

где a , d — некоторые константы.

Эта формула (5), по мнению Планка, была компромиссом, когда при малых значениях U формула (5) согласуется с законом излучения Вина, то есть когда

$$\frac{\partial^2 S}{\partial U^2} = \frac{\text{const}}{U}, \text{ а при больших значениях } U \text{ формула}$$

(5) согласуется с законом излучения Рэлея-Джинса,

$$\text{то есть когда } \frac{\partial^2 S}{\partial U^2} = \frac{\text{const}}{U^2}.$$

При дальнейшем анализе логическое обоснование формулы (5) заставило Планка выдвинуть понятия «элементарного кванта действия» и тем самым положить начало развитию квантовой теории.

Время t_{\min} между гребнями двух соседних колебаний, характеризующихся величинами ϵ_{\max} и v_{\max} , определяется как

$$t_{\min} = \frac{1}{v_{\max}} = \frac{h}{\epsilon_{\max}}. \quad (6)$$

Следовательно, любой временной интервал не может быть меньше, чем t_{\min}

$$t \geq t_{\min}. \quad (7)$$

Отсюда, t_{\min} идентифицируется как квант Времени, иначе говоря, как временной интервал, уменьшить который принципиально невозможно.

Далее, в физическом Пространстве существует минимальная длина λ_{\min} между гребнями двух соседних колебаний, характеризующихся величинами ϵ_{\max} и v_{\max} , которую можно определить как путь, пройденный за время t_{\min} со скоростью V_{\max}

$$\lambda_{\min} = V_{\max} \cdot t_{\min}. \quad (8)$$

Следовательно, любой пространственный интервал не может быть меньше, чем λ_{\min}

$$\lambda \geq \lambda_{\min}. \quad (9)$$

Отсюда, λ_{\min} идентифицируется как квант длины, иначе говоря, как пространственный интервал, который уменьшить принципиально невозможно.

В генезисе Вселенной не могло быть заложено совмещение дискретного и непрерывного начал. Тот сценарий возникновения и развития Вселенной, который реализовался, реализуется и будет реализовываться в дальнейшем, требует дискретного состояния материальных объектов (элементарные частицы), дискретно изменяющейся величины зарядов, дискретного состояния энергии (фотоны, кванты излучения и поглощения). Вполне возможно, что изначальная дискретность Времени и физического Пространства обусловила дискретность вещества, заряда, энергии. Другими словами, кванты вещества, заряда, энергии не могут сосуществовать в непрерывном Времени и в непрерывном физическом Пространстве, но естественно «уживаются» с дискретными физическим Пространством и дискретным Временем.

В этой связи необходимо сказать, что кванты энергии, вещества, заряда проявляются в результате действия гораздо более глубокого и более общего принципа, связанного с существованием кванта Времени t_{\min} и кванта Пространства λ_{\min} . Поэтому понятия квантов энергии, вещества, заряда должны отступить на второй план, так как они являются следствием более фундаментальных понятий t_{\min} и λ_{\min} .

Время позволяет упорядочить череду событий, установить, что одно событие предшествует другому. Связать каждый момент времени с числом, рассмат-

ривать Время как континуум — это математическое изобретение. Аналогично, физическое Пространство позволяет упорядочить череду материальных объектов, установить местоположение одного материального объекта относительно другого материального объекта. Но связать каждую точку физического Пространства с набором чисел, рассматривать физическое Пространство как континуум — это также математическое изобретение.

Геометризация (математизация) механического движения с помощью представления о непрерывной траектории в непрерывном Пространстве и непрерывном Времени лишь математически означает возможность установления однозначного соответствия между континуумами точек Пространства и моментов Времени. Такая связь формулируется в виде дифференциальных уравнений второго порядка по временной переменной, которые объективно символизируют реальные движения. Зная конкретный вид дифференциальных уравнений и начальные условия движения, можно легко предсказать траекторию движения тела в будущем либо восстановить эту траекторию в прошлом. Поэтому здесь нет ни неопределенности, ни случайности, ни возможности, разве что последние вносятся на стадии выяснения начальных условий.

Однако физическая реальность указывает на то, что математические изобретения — временной континуум и пространственный континуум — ошибочны. В научном знании создан прецедент, когда физика своим законом сохранения и превращения энергии указала на ошибочность фундаментальных математических изобретений применительно к физической реальности. Закон сохранения и превращения энергии не может выполняться во временном и пространственном континуумах, поскольку он демонстрирует особое проявление свойств материальных объектов, реальных форм материальной Действительности. Этот закон выполняется только в дискретном по структуре Времени и в дискретном по структуре физическом Пространстве.

Справедливости ради необходимо отметить, что с помощью математики (теория множеств) имеется возможность точно определить то логическое противоречие, которое скрывается в непрерывной модели движения и к которому неминуемо приводит отождествление этой модели с реальностью. Сущность этого логического противоречия заключается в следующем: непрерывная модель движения незаконно переносит «абсолютность» движения на реальный объект и предполагает, что движущееся тело последовательно проходит все точки своей непрерывной траектории. Но в континууме, в непрерывной модели Пространства и Времени, не существует точки, следующей непосредственно за данной точкой. Именно такова современная модель континуума с точки зрения теории множеств.

Необратимость во времени эволюции Вселенной как вывод напрямую следует из-за наличия квантов Времени t_{\min} и отсутствия непрерывности временного континуума. К тому же наличие квантов Времени t_{\min} указывает на то, что становится невозможным говорить об одновременном, иначе говоря, одномоментном появлении, определении, наблюдении двух и более событий. Тем самым теряет смысл абстракция одновременности. Более того, наличие кванта длины λ_{\min} указывает на то, что физическое Пространство не может обладать кривизной, ибо оно перестало быть непрерывным.

Обсуждаемая гипотеза достаточно глубока и имеет далеко идущие следствия. Изучение физического

Пространства в масштабах меньших, чем λ_{\min} , объективно невозможно, измерение временного интервала в масштабах меньших, чем t_{\min} , объективно невозможно, поэтому имеется принципиальная неопределенность временных и пространственных координат материальных объектов и связанных с ними понятий, принципов, математических и физических теорий.

Разрешающая способность научных экспериментов не может быть меньше λ_{\min} , t_{\min} и, следовательно, разрешающая способность научного знания принципиально ограничена этими двумя величинами. Здесь уместна аналогия с разрешающей способностью оптических приборов. Объективная реальность, изучаемая физикой, лежит вне временного интервала t_{\min} и вне пространственного интервала λ_{\min} .

Таким образом, существование квантов Времени t_{\min} и квантов физического Пространства λ_{\min} с необходимостью приводит к тому, что любая реальная физическая система, в том числе и Вселенная в целом, не может быть абсолютно и исчерпывающе детализирована во Времени и физическом Пространстве в силу существования конечных областей неопределенности t_{\min} и λ_{\min} , и истинный смысл которых состоит в том, что они дают универсальный масштаб индетерминизма, внутренне присущего законам Природы, и совместно с постоянной Планка h обуславливают корпускулярно-волновой дуализм.

Первозданная хаотичность квантовых состояний объясняется и определяется дискретной структурой Времени и физического Пространства, другими словами наличие квантов Времени и физического Пространства не позволяет исчерпывающе детализировать состояния квантовых объектов. Отсюда следует, что состояния квантовых объектов изначально хаотичны (стохастичны), описываются распределениями амплитуд вероятностей (волновой функцией) и изменение состояния квантовых объектов обязательно должно быть дискретным процессом. Но, с другой стороны, хаотичность состояний квантовых объектов объясняется дискретностью Времени и физического Пространства и служит экспериментальным подтверждением существования квантов Времени и квантов физического Пространства, что, в свою очередь, не дает возможность исчерпывающей детализации квантовых объектов, не дает возможность раскрыть неопределенность состояния квантовых объектов в принципиальном плане. Поэтому в физических экспериментах всегда будет подтверждаться хаотичность и случайность, а не детерминированность и на страже этого стоят кванты Времени и кванты физического Пространства. Таким образом, определена такая инфраструктура Вселенной, которая объясняет возникновение первозданной хаотичности состояний квантовых объектов и связанное с этой первозданной хаотичностью появление распределения амплитуд вероятностей состояний квантовых объектов на уровне наблюдений как фундаментального атрибута физической реальности, и в которую логически вписываются принцип комплементарности Бора и соотношение неопределенностей Гейзенберга.

Если на уровне микромира имеет место объективная первозданная хаотичность, то картина Вселенной ограничена не только рамками классических и квантовых физических представлений, не только участвовавшими в их создании человеческими возможностями познания, но более того, ограничена самой Природой.

Концепция дискретности Пространства и Времени ограничивает, по сути дела, возможность науч-

ного познания, ибо объективно устанавливает некий неделимый субстанциональный предел. Любая теоретическая структура, претендующая на раскрытие тайны природного явления или даже тайны возникновения и развития Вселенной в целом, обязана быть логически непротиворечивой, но она будет всегда неполной, какие бы скрытые параметры не вводились в рассмотрение, и причиной такого состояния является дискретность Пространства и Времени.

Природой не предусмотрено таких энергетических ресурсов, чтобы проникнуть внутрь неделимого субстанционального предела и никакие научные достижения не могут помочь перешагнуть этот энергетический барьер. Как энтропия накладывает запрет на существование обратимых во времени физических процессов, так дискретность физического Пространства и Времени накладывает запрет на наблюдение физических процессов внутри неделимого субстанционального предела. Отсюда следует заключение, что Наблюдатель, регистрируя результаты наблюдений и экспериментов над объектами микромира, затем на их основании может только теоретически реконструировать всю совокупность возможностей объектов микромира и не более того. Но тогда можно заключить, что Наблюдатель и в целом Разум необходим, чтобы видеть и понимать с теоретической и экспериментальной точек зрения единство Вселенной на микро-, макро- и мегауровнях через ее конкретные физические проявления и в дальнейшем найти способ влиять на развитие Вселенной и тем самым продолжить Творение Вселенной.

Закон сохранения и превращения энергии является эмпирическим принципом, ни в одном эксперименте не опровергнутый, считается фундаментальным законом физики. Через этот самый известный и непререкаемый закон Природа информирует Наблюдателя о существовании квантов физического Пространства и квантов Времени. Более того, этот закон обеспечивает единство Вселенной на микро-, макро- и мегауровнях, ибо только он из всего множества физических законов действует и справедлив без исключений на всех уровнях Вселенной. Говоря образным языком, спектакль под названием «Возникновение и развитие Вселенной» поставлен великим режиссером — законом сохранения и превращения энергии.

Существование кванта Времени t_{\min} и кванта Пространства λ_{\min} однозначно указывает на то, что причинно-следственные связи, коррелированные с законами сохранения энергии, импульса и момента импульса, как впрочем и с другими законами сохранения, имеют место быть только тогда, когда временные координаты $t \geq t_{\min}$, пространственные координаты $\lambda \geq \lambda_{\min}$. Если же $t < t_{\min}$, $\lambda < \lambda_{\min}$, то законы сохранения теряют смысл, неприменимы, несправедливы, неустойчивы, и это означает, что не действуют причинно-следственные связи. Это является глобальным выводом для квантовой физики.

Итак, дискретный Мир — это Мир с причинно-следственными связями, а непрерывный Мир — это Мир, в котором не существует причинно-следственных связей.

Обозначим через t_{\min} квант Времени, λ_{\min} квант физического Пространства, T_{\max} максимальную температуру и ν_{\max} максимальную частоту излучения при возникновении Вселенной. Понятие квантов физического Пространства λ_{\min} и Времени t_{\min} позволяет уйти от сингулярности, являющейся «проклятием» модели Большого Взрыва и её модификаций в математическом и физическом смыслах, поскольку на-

чальные условия теперь обязаны задаваться не с бесконечными или нулевыми значениями, не в виде материальной точки, а некоторой конечной областью в фазовом пространстве и, следовательно, с конечными значениями начальных условий, когда действуют и справедливы известные физические законы.

Численные значения квантов Времени t_{\min} и физического Пространства λ_{\min} теоретически могут быть определены в условиях возникающей Вселенной, когда наиболее ярко проявлялась доминирующая роль квантов Времени и физического Пространства, когда кванты Времени и физического Пространства определяли структуру и энергетические соотношения возникающей Вселенной.

В первые мгновения возникновения Вселенной, в так называемую эру Планка, вся пра-Материя была высокотемпературной смесью первичных высокоэнергичных фотонов и первичных частиц и античастиц определенного типа. Первичные высокоэнергичные фотоны моментально материализовывались в первичные частицы и античастицы. Первичные частицы при столкновении со своими античастицами аннигилировали, превращаясь в первичные высокоэнергичные фотоны. Наибольшая температура T_{\max} характеризует и состояние первичных фотонов, и состояние первичных элементарных частиц и античастиц. Весьма важным является то обстоятельство, что на расстояниях, соизмеримых с λ_{\min} , все типы физических взаимодействий становятся одинаково эффективными и поэтому неотличимыми друг от друга. Действующие физические законы позволяют математически описать начальное состояние Вселенной и, что является принципиально важным для физической науки, определить численные значения t_{\min} , λ_{\min} , T_{\max} , v_{\max} .

В соответствии с результатами, приведёнными в [5], определение численных значений t_{\min} , λ_{\min} , T_{\max} , v_{\max} проводится следующим образом. Температура T_{\max} начального состояния со временем понижается из-за расширения Вселенной и зависимость температуры T от времени t выражается как

$$T = \frac{10^{10}}{\sqrt{t}}. \quad (10)$$

Выражение (10) получено с помощью анализа уравнений [2], характеризующих температурное ослабление излучения при расширении Вселенной.

Ключевая операция при определении величины кванта Времени t_{\min} связано с применением формулы (10). Постоянная $F' = 10^{10} \text{ К}^0 \cdot \text{с}^{1/2}$ в формуле (10), которую автор назвал космологической постоянной, относится к ряду мировых констант. Оценка величины F' получена на основании современных оценок постоянной Хаббла H , температуры «реликтового» излучения $T_{\text{рел}}$, возраста Вселенной t , истинные значения которых лежат в достаточно широких пределах, поэтому истинное значение F' также лежит в широких пределах и, естественно, требует уточнения. К этой идее, идее уточнения величины F' автор пришел после анализа результатов, изложенных в [5], где получено теоретическое решение задачи отыскания t_{\min} и связанных с ним величин λ_{\min} , T_{\max} , v_{\max} . Теоретическое решение показало, что t_{\min} оказалось примерно в 7 раз больше, чем оценка $t_{\min \text{пр}}$ данной Пригожиным в [6]. Но, по мнению автора, теоретическое решение должно увеличивать разрешающую способность научного знания и, следовательно, получаемая теоретическим путем величина t_{\min} должна быть

меньше, чем оценка $t_{\min \text{пр}}$. Отсюда и следует вывод о необходимости уточнения F' .

Следуя Пригожину, который конструировал некоторые фундаментальные физические величины с помощью комбинаций мировых констант с обязательным условием совпадения размерностей конструируемых фундаментальных физических величин и размерностей комбинаций мировых констант, автор нашел, что космологическая постоянная F (уже не оценка F') получается равной следующей комбинации мировых констант

$$F = \sqrt[4]{\frac{h \cdot b^2 \cdot c^3}{k^2 \cdot G}} = \sqrt[4]{\frac{6.62 \cdot 10^{-34} \cdot (2.9 \cdot 10^{-3})^2 \cdot (3 \cdot 10^8)^3}{(1.38 \cdot 10^{-23})^2 \cdot 6.67 \cdot 10^{-11}}} = 5.865 \cdot 10^{10} \text{ К}^0 \cdot \text{с}^{1/2}, \quad (11)$$

где b — постоянная Вина,
 k — постоянная Больцмана,
 G — постоянная гравитации,
 h , c — постоянные, которые объяснялись ранее.

Полученное значение F совпадает по порядку величины с оценкой F' и это свидетельствует о том, что логические рассуждения автора не являются противоречивыми, и вызывает большее доверие, чем оценка F' , так как вычисляется через хорошо проверенное численное значение известных мировых констант.

Таким образом, принимаем, что численное значение космологической постоянной равно $F = 5.865 \cdot 10^{10} \text{ К}^0 \cdot \text{с}^{1/2}$ и ключевая формула (10) приобретает вид

$$T = \frac{5.865 \cdot 10^{10}}{\sqrt{t}}. \quad (12)$$

В дальнейшем, уточненная формула (12) позволит провести коррекцию постоянной Хаббла H , возраста Вселенной t , температуры «реликтового» излучения $T_{\text{рел}}$ и связанных с ними величин. Несомненно, что внесенные уточнения окажут влияние на развитие космогонии и космологии.

Если теперь, согласно методологии [5], получить теоретическое решение для t_{\min} , то увидим, что квант Времени t_{\min} получается равным

$$t_{\min} = \frac{b^2}{c^2 \cdot F^2} = \frac{(2.9 \cdot 10^{-3})^2}{(3 \cdot 10^8)^2 \cdot (5.865 \cdot 10^{10})^2} \cong 2.7 \cdot 10^{-44} \text{ с}. \quad (13)$$

Эта величина t_{\min} примерно в 4,5 раза меньше, чем оценка $t_{\min \text{пр}}$, то есть теоретическое решение для t_{\min} по уточненной формуле (12) показало увеличение разрешающей способности научного знания по сравнению с оценкой $t_{\min \text{пр}}$, что и указывает на более высокую достоверность полученного теоретическим путем результата.

Отсюда

$$\lambda_{\min} = c \cdot t_{\min} = 3 \cdot 10^8 \cdot 2.7 \cdot 10^{-44} \cong 0.81 \cdot 10^{-35} \text{ м}, \quad (14)$$

$$T_{\max} = \frac{5.865 \cdot 10^{10}}{\sqrt{t_{\min}}} = \frac{5.865 \cdot 10^{10}}{\sqrt{2.7 \cdot 10^{-44}}} \cong 3.58 \cdot 10^{32} \text{ К}^0, \quad (15)$$

$$v_{\max} = \frac{1}{t_{\min}} = \frac{1}{2.7 \cdot 10^{-44}} \cong 3.7 \cdot 10^{43} \text{ Гц}. \quad (16)$$

Далее нетрудно получить объективные оценки энергии ϵ_1 и массы m_1 первичных фотонов, частиц и античастиц. Имеем

$$\epsilon_1 = h \cdot \nu_{\max} = 6.62 \cdot 10^{-34} \cdot 3.7 \cdot 10^{43} \approx 24.3 \cdot 10^9 \text{ Дж}, \quad (17)$$

$$m_1 = \frac{\epsilon_1}{c^2} = \frac{24.3 \cdot 10^9}{(3 \cdot 10^8)^2} \approx 2.6 \cdot 10^{-7} \text{ кг}. \quad (18)$$

В этой связи имеет смысл обратить внимание на следующее соображение. После того как, вопреки имевшим место в последнее десятилетие прогнозам сторонников дискретности физического Пространства, развитие квантовой физики не подтвердило наличие наименьшей (фундаментальной) длины на расстояниях $10^{-18} - 10^{-19}$ м, физиками было выдвинуто предположение о возможности существования фундаментальной длины, совпадающей по порядку величины с планковской длиной. И вот теперь это предположение приобрело характер доказанного утверждения.

Отметим одно важное обстоятельство, связанное с наличием квантов Времени t_{\min} и квантов физического Пространства λ_{\min} . Гамма-лучи корпускулярны по своей природе, поскольку каждый луч является отдельной сущностью, движущейся через пространство без изменений в форме и без диссипации энергии, совершенно так же, как двигались бы свободные частицы. Однако дифракция гамма-лучей на дифракционных решетках, созданных самой Природой, недвусмысленно подтвердило их волновой характер. Только благодаря тому обстоятельству, что имеются природные дифракционные решетки, явление дифракции для гамма-лучей и было обнаружено. Но совершенно очевидно, что с ростом частоты ν и уменьшением длины волны λ , квантовая физика придет к ситуации, когда природных дифракционных решеток с нужной разрешающей способностью не будет, а тем более, не будет искусственно полученных дифракционных решеток с нужной разрешающей способностью. И тогда для некоторой критической частоты $\nu_{\text{кр}}$ и некоторой критической длины волны $\lambda_{\text{кр}}$, когда $\nu \geq \nu_{\text{кр}}$ или $\lambda \leq \lambda_{\text{кр}}$, явление дифракции для гамма-лучей невозможно будет обнаружить в принципе, и тогда о таких гамма-лучах совершенно точно можно будет говорить, что это корпускулы.

В пользу этого соображения говорит тот факт, что при «освещении» частицы гамма-лучами длину волны падающего гамма-излучения нельзя сделать меньше, чем возрастание длины волны, обусловленное эффектом Комптона. Из этого следует, что с уменьшением длины волны падающего гамма-излучения угол рассеивания θ обязан будет стремиться к нулю, поскольку комптоновская длина волны λ_c неизменна по величине. Стремление к нулю угла рассеивания θ указывает на то, что рассеивание гамма-лучей исчезает. Другими словами, гамма-излучение с $\nu \geq \nu_{\text{кр}}$ или $\lambda \leq \lambda_{\text{кр}}$ на пути своего движения не замечает квантовые микробиъекты, которые для него «прозрачны» и, следовательно, природных дифракционных решеток с нужной разрешающей способностью для него не существует.

Отсюда следует, что гамма-излучение с частотой, лежащей в интервале $\nu_{\text{кр}} \leq \nu \leq \nu_{\max}$ или длиной волны, лежащей в интервале $\lambda_{\min} \leq \lambda \leq \lambda_{\text{кр}}$, представляет собой кванты, характеризующиеся только корпускулярными свойствами, волновые свойства таких квантов не могут быть обнаружены, не могут быть наблюдаемы и, следовательно, никоим образом не проявляются.

При возникновении Вселенной Природой «предусмотрено» конкретное значение квантов Времени t_{\min} и квантов физического Пространства λ_{\min} и тем самым определены наибольшие, максимально возможные, но тем не менее конечные значения температуры T_{\max} , частоты ν_{\max} , энергии первичных фотонов, первичных частиц и античастиц $\epsilon_{\max} = \epsilon_1$, их масс m_1 . Благодаря этим обстоятельствам стало возможным существование фундаментального закона сохранения и превращения энергии. И поскольку Вселенная возникла, развивается и будет развиваться в Пространстве и Времени, то, следовательно, Пространство и Время обязаны иметь пределы λ_{\min} , t_{\min} пространственно-временной локализации как при возникновении Вселенной, так и на любом этапе её развития.

Те новые фундаментальные представления о Времени и Пространстве, о возникновении и развитии Вселенной, которые изложены в статье, со временем могут претерпеть некоторые изменения или уточнения, но их нельзя игнорировать и ими нельзя пренебрегать.

Полученные результаты однозначно указывают на то, что многовековое философское противостояние между концепциями дискретности и непрерывности при его переносе на почву действительной реальности естественным образом разрешилось в пользу концепции дискретности физического Пространства и Времени. Однако это не означает, что концепцию непрерывности нельзя применять в качестве рабочей концепции в теоретических построениях как философии, так и физики, математики и связанных с ними наук, но только при этом надо учитывать принципиальные ограничения, накладываемые концепцией дискретности на концепцию непрерывности. Аналогичные отношения, например, сложились между квантовой физикой и классической физикой.

Итоговая констатация изложенных результатов исследования заключается в том, что доказано существование пределов λ_{\min} , t_{\min} пространственно-временной локализации и, следовательно, доказана дискретность Пространства и Времени с вытекающими из этого факта фундаментальными представлениями, существенно изменяющими и уточняющими существующую квантовую физику.

Вполне возможно, что полученные результаты позволят говорить о рождении нового раздела физики — квантовой космологии. Квантовая космология — это тот раздел экспериментальной и теоретической физики, где изучаются физические явления и процессы, сущность которых определяется постоянной Планка и космологической постоянной и куда со временем составными частями войдут квантовая физика и космология.

Библиографический список

1. Мицкевич Н.В. Парадоксы Пространства — Времени в современной космологии / Астрономия. Методология. Мировоззрение. — М.: Наука, 1979. — 287 с.
2. Пенроуз Р. Структура пространства и Времени. — М.: Наука, 1972. — 247 с.
3. Фёдоров В. К. Эволюция квантовой физики: дискретная структура Времени и физического Пространства Вселенной // Омский научный вестник. — 2007. — № 2 (56). — С. 13–16.
4. Джеммер М. Эволюция понятий квантовой механики. — М.: Наука, 1985. — 384 с.
5. Фёдоров В.К. Генезис Вселенной: фундаментальные пространственно-временные и энергетические соотношения // Омский научный вестник. — 2008. — № 3 (70). — С. 9–15.

УДК 517.9

Н. Г. ЧУРАШЕВА

Омский государственный
технический университет

МАТРИЦЫ РИМАНА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ. СЛУЧАЙ АНИЗОТРОПНОГО ТЕЛА

Рассматривается гиперболическая система, описывающая процесс распространения тепла в анизотропном теле в рамках гиперболической модели теплопроводности. Построены формулы для матриц Римана первого и второго рода этой системы.

Ключевые слова: гиперболическая теплопроводность, анизотропное тело, матрицы Римана.

Введение

В работах [1], [2] распространен метод Римана решения задачи Коши для гиперболического уравнения второго порядка на линейные гиперболические системы общего вида с двумя независимыми переменными. Ядрами интегральной формулы для ее решения служат матрицы двух типов, зависящие от пары точек и получившие название матриц-функций Римана первого и второго порядка. Матрица первого типа $U_k(s, t)$ — таких матриц столько, сколько характеристик проходит через фиксированную точку плоскости — определена как функция от s на проходящей через точку t характеристике с номером k и представляет собой матрицу Коши системы обыкновенных уравнений переноса вдоль характеристики. Матрица второго типа $V(s, t)$ — кусочно-гладкое решение по s однородной гиперболической системы со скачками на характеристиках, строящимся по матрицам U_k . Имеются двойственные соотношения для матриц U_k , V по t при фиксированном s . В случае постоянных коэффициентов получены формулы для матриц Римана в виде контурных интегралов от аналитических матриц-функций, строящихся по коэффициентам системы.

В последнее десятилетие продолжились исследования по методу Римана для гиперболических систем. В работе [3] вычислены матрицы Римана для гиперболической системы двух уравнений с переменными коэффициентами. В [4], [5] (смотри также книгу [6]) аппарат матриц Римана применен к решению смешанной задачи и задачи Стефана для систем этого класса. В [7] — [10] получены приложения к задаче граничного управления процессом теплопереноса в рамках гиперболической модели теплопроводности для изотропного тела.

Представляет теоретический и практический интерес распространение результатов работ [9], [10]

на существенно более сложный случай анизотропного тела. В этой ситуации коэффициент теплопроводности — тензор, представляющий собой симметрическую положительно определенную матрицу второго (для пластинки) или третьего (для пространственного тела) порядков. Данная работа — начальный этап этого исследования. Посвящена вычислению матриц Римана первого и второго рода гиперболического оператора теплопроводности для анизотропного случая.

В §1 кратко изложены используемые далее сведения из работ [1], [2].

§1. Предварительные сведения

1. Рассмотрим гиперболический оператор

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + A \frac{\partial}{\partial s} + B, \quad (s, t) \in \mathbb{R}^2. \quad (1)$$

Здесь A, B — постоянные матрицы порядка N ,

$$A = Z \operatorname{diag}(a_1 I_1, \dots, a_n I_n) Z^{-1}, \quad a_1 > \dots > a_n,$$

I_k — единичная матрица порядка N_k , $\sum N_k = N$. Через каждую точку $(\sigma, \tau) \in \mathbb{R}^2$ проходят n характеристик

$$\ell_k(\sigma, \tau) = \{ (s, t): s - \sigma - a_k(t - \tau) = 0 \}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Отнесем каждой характеристике матрицу порядка N

$$U_k(s, t) = U_k(t) = P_k \exp(-P_k B P_k t), \\ (s, t) \in \ell_k(0, 0), \quad k = 1, \dots, n, \quad (2)$$

где $P_k = Z \operatorname{diag}(0, \dots, 0, I_k, 0, \dots, 0) Z^{-1}$.

Обозначим Y_j объединение открытых углов между $\ell_j(0,0), \ell_{j+1}(0,0)$, лежащих ниже и выше точки $(0,0)$ ($j=1, \dots, n-1$), Y_0 — объединение открытых углов между $\ell_1(0,0), \ell_n(0,0)$ левее и правее точки $(0,0)$ (рис. 1).

Определим кусочно-гладкую матрицу $V(x, t)$ порядка N формулой

$$V(s, t) = \begin{cases} Z V_j Z^{-1}, & (s, t) \in Y_j, \quad j = 1, \dots, n-1, \\ 0, & (s, t) \in Y_0, \end{cases}$$

где

$$V_j = \frac{(2\pi)^2}{a_j - a_{j+1}} \iint_{\gamma} \exp \frac{\begin{vmatrix} \xi & s - a_j t \\ \eta & s - a_{j+1} t \end{vmatrix}}{a_j - a_{j+1}} \Delta_j^{-1}(\xi, \eta) d\xi d\eta;$$

здесь

$$\gamma = \{\xi \in \mathbb{C} : |\xi| = R \geq 2n\|B\|\},$$

$$\Delta_j = \text{diag}(\xi_1 I_1, \dots, \xi_n I_n) + B_0, \quad B_0 = Z^{-1} B Z,$$

$$\xi_k = \frac{(a_k - a_{j+1})\xi + (a_j - a_k)\eta}{a_j - a_{j+1}}.$$

Матрицы U_k, V_j — матрицы Римана первого и второго рода гиперболического оператора L с постоянными коэффициентами; общий случай рассматривается в [1, 2].

2. Пусть $u = (u_1, \dots, u_n)^T$ — вектор из \mathbb{R}^N , где u_k имеет размер N_k . Представим оператор L в виде

$$L = Z D Z^{-1} + B, \quad D = \text{diag}(D_1, \dots, D_n), \quad (3)$$

где D_k — оператор дифференцирования по t вдоль характеристики с номером k . Будем говорить, что функция $u(x, t)$ со значениями в \mathbb{R}^N принадлежит классу S_L , если 1) $u \in C(\mathbb{R}^2)$; 2) для каждой компоненты v_k вектора $v = Z^{-1}u$ существует производная $D_k v_k \in C(\mathbb{R}^2)$. Рассмотрим задачу Коши

$$L(u) = 0, \quad u(s, 0) = h(s). \quad (4)$$

Решением (обобщенным) задачи Коши (4) назовем функцию $u(x, t) \in S_L$, если она удовлетворяет соотношению (4), где оператор L понимается в смысле (3).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. В случае $h \in C^\infty(\mathbb{R})$ задача Коши (4) имеет точно одно решение класса $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Это решение дается формулой

$$u(s, t) = \sum_{k=1}^n U_k(t) h(s - a_k t) + \int_{s-a_1 t}^{s-a_n t} V(s - \sigma, t) h(\sigma) d\sigma, \quad (5)$$

где U_k, V — матрицы Римана (рис. 2). В случае $h \in C(\mathbb{R})$ задача Коши (4) однозначно разрешима в классе S_L с сохранением формулы (5).

§2. Гиперболическая теплопроводность. Случай анизотропного тела

В основе классической теории теплопроводности лежит гипотеза Фурье, связывающая вектор теплового потока с градиентом температуры. В случае анизотропного тела она имеет вид [12, гл. 1, § 6]

$$q = -K \text{ grad } T. \quad (6)$$

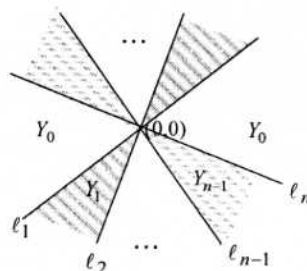


Рис. 1

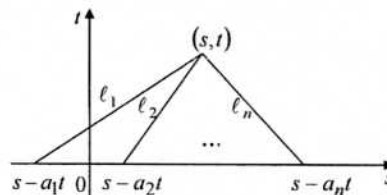


Рис. 2

Здесь K — симметрическая положительно определенная матрица:

$$K^* = K, \quad K > 0, \quad (7)$$

символ $*$ означает транспонирование.

Тепловой поток и градиент вычисляются в точке в один и тот же момент времени t . Соотношение (6) вместе с законом сохранения энергии

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} + \text{div } q = 0 \quad (8)$$

образуют параболическую систему уравнений теплопроводности для анизотропного тела. Здесь c, ρ — удельная теплоемкость при постоянном объеме и плотность.

В рамках параболической модели теплопроводности наблюдается парадокс, впервые замеченный Максвеллом: начальное финитное тепловое возмущение в любой следующий момент времени имеет носитель, совпадающий со всем пространством, т.е. распространяется с бесконечной скоростью. Неприемлемость этого с физической точки зрения, а также эксперименты по распространению тепловых импульсов в твердых телах и в химических реакторах, показывающие, что тепловой импульс в ряде ситуаций ведет себя как волна, привели в последние десятилетия к новой модели теплопроводности, в основе которой лежит гипотеза Каттанео-Лыкова-Вернотта [13]. В случае анизотропного тела она имеет вид

$$q|_{t+\varepsilon} = -K \text{ grad } T|_t,$$

ε — время релаксации теплового потока. Для металлов эта величина $\varepsilon \sim 10^{-11}$ с, для полимеров $\varepsilon \sim 10^{-6} - 10^{-5}$ с.

Разлагая левую часть в ряд по степеням малого параметра и отбрасывая члены выше первого порядка, получим соотношение

$$q + \varepsilon \frac{\partial q}{\partial t} + K \text{ grad } T = 0.$$

Это уравнение вместе с (8), где справедлива (7) образуют гиперболическую систему уравнений теплопроводности

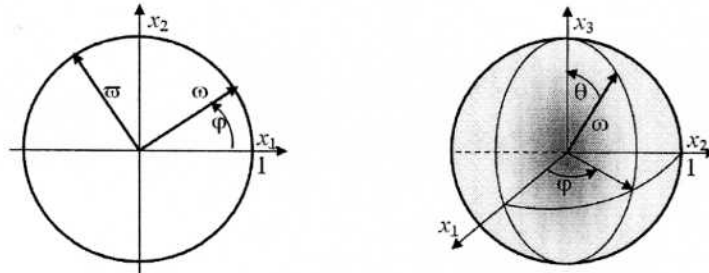


Рис. 3

$$\begin{cases} \varepsilon \rho \frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div} q = 0, \\ \varepsilon \frac{\partial q}{\partial t} + K \operatorname{grad} T + q = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Пусть ω — произвольный орт на плоскости или в пространстве (рис. 3). Тогда начальное тепловое возмущение, локализованное в малой окрестности какой-либо точки анизотропного тела, распространяется с конечной скоростью a_ω , зависящей от направления ω :

$$a_\omega = \sqrt{\frac{\omega^* K \omega}{\varepsilon \rho}}.$$

В частном случае изотропного тела $K = k I$, где $k > 0$, I — единичная матрица. В этом случае, с учетом $\omega^* K \omega = k \omega^* \omega = k$, тепловое воздействие распространяется по всем направлениям с одинаковой

скоростью $a = \sqrt{\frac{k}{\varepsilon \rho}}$.

§3. Матрицы Римана системы (9). Случай двумерного материала

Система (9) в векторно-матричных обозначениях имеет вид

$$L(u) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^2 A_k \frac{\partial}{\partial x_k} + B \right) u = 0, \quad u(x_1, x_2, t) = \begin{pmatrix} T \\ q \end{pmatrix}, \quad q(x_1, x_2, t) = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & (c\rho)^{-1} & 0 \\ \varepsilon^{-1} \kappa_{11} & 0 & 0 \\ \varepsilon^{-1} \kappa_{21} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & (c\rho)^{-1} \\ \varepsilon^{-1} \kappa_{12} & 0 & 0 \\ \varepsilon^{-1} \kappa_{22} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = \varepsilon^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Здесь κ_{ij} — элементы матрицы K , $\kappa_{ij} = \kappa_{ji}$. Введем семейство ортов

$$\Omega = \left\{ \omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad \varphi \in [0, \pi] \right\}, \quad \varpi = \begin{pmatrix} -\omega_2 \\ \omega_1 \end{pmatrix}.$$

Поставим в соответствие двумерному гиперболическому оператору (10) семейство одномерных гиперболических операторов

$$L_\omega = \frac{\partial}{\partial t} + A(\omega) \frac{\partial}{\partial s} + B, \quad A(\omega) = \omega_1 A_1 + \omega_2 A_2, \quad \omega \in \Omega.$$

Матрицу $A(\omega)$ представим в виде

$$A(\omega) = Z_\omega \operatorname{diag}(a_\omega, 0, -a_\omega) Z_\omega^{-1},$$

$$Z_\omega = \begin{pmatrix} a_\omega & O \\ O & \varepsilon^{-1} K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{-1/2} & 0 & 2^{-1/2} \\ 2^{-1/2} \omega & -\varpi & -2^{-1/2} \omega \end{pmatrix},$$

$$O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

$$Z_\omega^{-1} = \begin{pmatrix} 2^{-1/2} & 0 & 2^{-1/2} \\ 2^{-1/2} \omega & -\varpi & -2^{-1/2} \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/a_\omega & O \\ O & \varepsilon K^{-1} \end{pmatrix}.$$

Матрицы Римана первого и второго рода $U_{k\omega}(t)$, $V_\omega(s, t)$ операторов L_ω будем (см. аналогично [9], [10]) называть матрицами Римана двумерной гиперболической системы уравнений теплопроводности (9). Зафиксируем $\omega \in \Omega$. Введем большой параметр

$$\alpha = (2\varepsilon)^{-1}. \quad (13)$$

Проведем через точку $(0, 0)$ характеристики ℓ_k , $k=1, 2, 3$ с уравнениями соответственно $s = a_\omega t$, $s = 0$, $s = -a_\omega t$, и пусть Y_j — открытые углы (рис. 1)

$$Y_0 = (\ell_1, \ell_3), \quad Y_1 = (\ell_1, \ell_2), \quad Y_2 = (\ell_2, \ell_3).$$

ТЕОРЕМА 1. Матрицы Римана двумерной гиперболической системы (10) даются формулами

$$U_{k\omega}(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} P_{k\omega}, & k=1, 3, \\ e^{-2\alpha t} P_{k\omega}, & k=2, \end{cases}$$

$$V_1 = V_2 = \frac{\alpha e^{-\alpha t}}{2a_\omega} \begin{pmatrix} r_1^{-1} r I_1(\alpha r) & 0 & I_0(\alpha r) \\ 0 & 0 & 0 \\ I_0(\alpha r) & 0 & r_2^{-1} r I_1(\alpha r) \end{pmatrix},$$

$$V_\omega(s, t) = \begin{cases} Z_\omega V_j Z_\omega^{-1}, & (s, t) \in Y_j, \quad j=1, 2, \\ 0, & (s, t) \in Y_0, \end{cases}$$

где $P_{k\omega} = Z_\omega \Pi_k Z_\omega^{-1}$, $r_{1,2} = t \mp s/a_\omega$, $r = \sqrt{r_1 r_2}$, $I_0(x)$, $I_1(x)$ — функции Бесселя мнимого аргумента, Z_ω — матрица (11), Π_k — стандартные проекторы:

$$\Pi_1 = \operatorname{diag}(1, 0, 0), \quad \Pi_2 = \operatorname{diag}(0, 1, 0), \quad \Pi_3 = \operatorname{diag}(0, 0, 1).$$

Проведем краткий вывод формулы для матриц $U_{k\omega}$. По формуле (2) имеем

$$U_{k\omega}(t) = P_{k\omega} \exp(-B_{k\omega} t), B_{k\omega} = Z_{\omega} P_k Z_{\omega}^{-1} B Z_{\omega} P_k Z_{\omega}^{-1}.$$

Вычисления с учетом формул (11), (12) для матриц B , Z_{ω} дают:

$$P_k Z_{\omega}^{-1} B Z_{\omega} P_k = \alpha P_k \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} P_k = \beta_k P_k,$$

$$\beta_k = \begin{cases} \alpha, & k=1,3, \\ 2\alpha, & k=2, \end{cases}$$

где α — константа (13), откуда получаем

$$B_{k\omega} = \beta_k Z_{\omega} P_k Z_{\omega}^{-1} = \beta_k P_{k\omega}, k=1,2,3.$$

Следовательно,

$$U_{k\omega}(t) = P_{k\omega} \exp(-\beta_k P_{k\omega} t) = P_{k\omega} \left(I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\beta_k P_{k\omega} t)^n}{n!} \right) =$$

$$P_{k\omega} + P_{k\omega} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\beta_k t)^n}{n!} = P_{k\omega} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta_k t)^n}{n!} = P_{k\omega} e^{-\beta_k t},$$

что и требовалось. Учтены равенство $P_{k\omega}^n = Z_{\omega} P_k^n Z_{\omega}^{-1}$, $Z_{\omega}^{-1} = Z_{\omega} P_k Z_{\omega}^{-1} = P_{k\omega}$ и формула для матричной экспоненты [11].

§4. Случай трехмерного материала

Система (9) для трехмерного материала примет вид

$$L(u) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 A_k \frac{\partial}{\partial x_k} + B \right) u = 0, \\ u(x_1, x_2, x_3, t) = \begin{pmatrix} T \\ q \end{pmatrix}, q(x_1, x_2, x_3, t) = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}, \quad (14)$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & (cp)^{-1} & 0 & 0 \\ \varepsilon^{-1} \kappa_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon^{-1} \kappa_{21} & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon^{-1} \kappa_{31} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & (cp)^{-1} & 0 \\ \varepsilon^{-1} \kappa_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon^{-1} \kappa_{22} & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon^{-1} \kappa_{32} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & (cp)^{-1} \\ \varepsilon^{-1} \kappa_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon^{-1} \kappa_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon^{-1} \kappa_{33} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = \varepsilon^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

κ_{ij} — элементы матрицы K , $\kappa_{ij} = \kappa_{ji}$.

Введем семейство ортов

$$\Omega = \left\{ \omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \varphi \in [0, \pi], \quad \theta \in [0, \pi] \right\}.$$

Поставим в соответствие трехмерному гиперболическому оператору (15) семейство одномерных гиперболических операторов

$$L_{\omega} = \frac{\partial}{\partial t} + A(\omega) \frac{\partial}{\partial s} + B,$$

$$A(\omega) = \sum_{k=1}^3 \omega_k A_k, \quad \omega \in \Omega. \quad (15)$$

Обозначим

$$f = \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ -\cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g = \omega \times f = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \theta \\ \sin \varphi \cos \theta \\ -\sin \theta \end{pmatrix}.$$

Тогда представим $A(\omega)$ в виде

$$A(\omega) = Z_{\omega} \text{diag}(a_{\omega}, 0, 0, -a_{\omega}) Z_{\omega}^{-1},$$

$$Z_{\omega} = \begin{pmatrix} a_{\omega} & O \\ O & \varepsilon^{-1} K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{-1/2} & 0 & 0 & 2^{-1/2} \\ 2^{-1/2} \omega & f & g & -2^{-1/2} \omega \end{pmatrix}, O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$Z_{\omega}^{-1} = \begin{pmatrix} 2^{-1/2} & 0 & 0 & 2^{-1/2} \\ 2^{-1/2} \omega & f & g & -2^{-1/2} \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{\omega}^{-1} & O \\ O & \varepsilon K^{-1} \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Матрицы Римана первого и второго рода $U_{k\omega}(t)$, $V_{\omega}(s, t)$ операторов (15) будем называть матрицами Римана трехмерной гиперболической системы уравнений теплопроводности (14).

ТЕОРЕМА 2. Матрицы Римана трехмерной гиперболической системы уравнений теплопроводности (14) задаются формулами

$$U_{k\omega}(t) = \begin{cases} e^{-\alpha t} P_k, & k=1,3, \\ e^{-2\alpha t} P_k, & k=2, \end{cases}$$

$$V_{\omega}(s, t) = \begin{cases} Z_{\omega} V_j Z_{\omega}^{-1}, & (s, t) \in Y_j, \quad j=1,2, \\ 0, & (s, t) \in Y_0, \end{cases}$$

$$V_1 = V_2 = \frac{\alpha e^{-\alpha t}}{2a_{\omega}} \begin{pmatrix} r_1^{-1} r I_1(\alpha r) & 0 & 0 & I_0(\alpha r) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ I_0(\alpha r) & 0 & 0 & r_2^{-1} r I_1(\alpha r) \end{pmatrix},$$

где α — постоянная (13), $r_{1,2} = t \mp s/a_{\omega}$, $r = \sqrt{r_1 r_2}$,

$P_{k\omega} = Z_{\omega} P_k Z_{\omega}^{-1}$, Z_{ω} — матрица (16), $P_1 = \text{diag}(1, 0, 0, 0)$,

$P_2 = \text{diag}(0, 1, 1, 0)$, $P_3 = \text{diag}(0, 0, 0, 1)$.

Вывод проводится аналогично двумерному случаю.

Библиографический список

1. Романовский, Р.К. О матрицах Римана первого и второго рода // Докл. АН СССР. — 1982. — Т. 267, № 3. — С. 577 — 580.
2. Романовский Р.К. О матрицах Римана первого и второго рода // Матем. сборник. — 1985. — Т. 127, № 4. — С. 494 — 501.
3. Стратилатова Е.Н. Матрицы Римана гиперболического оператора теплопроводности // Омск, 2005. — 22 с. — Деп. в ВИНТИ, 26.01.2005. №1367 — В 2005.

4. Воробьева Е.В., Романовский Р.К. Метод характеристик для гиперболических краевых задач на плоскости // Сиб. мат. журн. 2000. — Т. 41, № 3. — С. 531–540.

5. Романовский Р.К., Стратилатова Е.Н. Решение одномерной однофазной гиперболической задачи Стефана методом граничных интегральных уравнений // Сиб. журн. индустр. математики. — 2004. — Т. 7, № 3(19). — С. 119–131.

6. Романовский Р.К., Воробьева Е.В., Стратилатова Е.Н. Метод Римана для гиперболических систем. — Новосибирск: Наука, 2007. — 172 с.

7. Жукова О.Г., Романовский Р.К. Граничное управление процессом теплопереноса в одномерном материале. Гиперболическая модель // Дифференц. уравнения. — 2007. — Т. 43, № 5. — С. 650–654.

8. Жукова О.Г., Романовский Р.К. Двустороннее граничное управление процессом теплопереноса в одномерном материале. Гиперболическая модель // Сиб. журн. индустр. матем. — 2007. — Т. 10, № 4(32). — С. 32–40.

9. Жукова О.Г., Романовский Р.К. Граничное управление процессом теплопереноса в одномерном материале. Гипербо-

лическая модель // Сиб. журн. индустр. матем. — 2008. — Т. 11, № 3. — С. 119–125.

10. Жукова О.Г. Граничное управление трехмерной гиперболической системой уравнений теплопроводности // Омск, 2007. — 12 с. — Деп. в ВИНТИ, 04.12.2007. №1126 — В2007.

11. Романовский Р.К., Стратилатова Е.Н. Элементы математической теории устойчивости. — Омск: ОмГТУ, 2009. — 76 с.

12. Карташов, Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. — М.: Высш. школа, 1985. — 480 с.

13. Лыков, А.В. Теория теплопроводности. — М.: Высш. школа, 1967. — 600 с.

ЧУРАШЕВА Надежда Георгиевна, старший преподаватель кафедры высшей математики.

Адрес для переписки: 644050, г. Омск, пр. Мира, 11.

Статья поступила в редакцию 01.09.2009 г.

© Н. Г. Чурашева

УДК 519.95

Н. В. МЕЛЕНЬЧУК

Омский государственный
технический университет

ДВУХШАГОВЫЙ ЭКСТРАГРАДИЕНТНЫЙ МЕТОД ДЛЯ РЕШЕНИЯ СЕДЛОВЫХ ЗАДАЧ

Задачи о седловой точке являются важным классом задач, но при решении последних стандартными методами возникает ряд проблем, связанных со сходимостью и довольно жёсткими налагаемыми требованиями. В связи с этим актуальна разработка новых методов, позволяющих эффективно решать подобные задачи.

Ключевые слова: экстраградиентный, седловая точка, оптимизация.

Множество интересных с точки зрения практики и вместе с тем сложных задач сводятся к задачам о седловой точке. Градиентные методы при решении задач оптимизации весьма распространены, однако, для задач о седловых точках они сходятся только при наличии жёстких предположений. Ослабить эти условия позволяют экстраградиентные методы [1–3].

Рассмотрим следующую задачу. Пусть $Q \subset R^n$, $S \subset R^m$ — подмножества евклидовых пространств; $\varphi(x, y)$ — функционал, заданный на $R^n \times R^m$. Требуется найти такую точку $[x^*, y^*] \in Q \times S$ (называемую седловой), что

$$\varphi(x^*, y) \leq \varphi(x^*, y^*) \quad \forall y \in S,$$

$$\varphi(x^*, y^*) \leq \varphi(x, y^*) \quad \forall x \in Q.$$

Далее будем предполагать, что выполняются следующие условия:

- а) множества Q и S замкнуты и выпуклы;
- б) функционал $\varphi(x, y)$ выпуклый по x , вогнутый по y , дифференцируемый, и его частные производные удовлетворяют условию Липшица на $Q \times S$, т.е.

$$\|\varphi_x(x, y) - \varphi_x(x', y')\| \leq L(\|x - x'\|^2 + \|y - y'\|^2)^{1/2},$$

$$\|\varphi_y(x, y) - \varphi_y(x', y')\| \leq L(\|x - x'\|^2 + \|y - y'\|^2)^{1/2};$$

в) множество $X^* \times Y^*$ седловых точек функционала $\varphi(x, y)$ на $Q \times S$ не пусто.

В такой постановке метод не требует каких-либо дополнительных ограничений по сравнению со стандартным экстраградиентным методом, однако, предполагается его большая эффективность на больших и трудоемких задачах. В настоящей работе строится двухшаговый экстраградиентный метод отыскания седловых точек, заключающийся в том, что направление движения алгоритма выбирается исходя из двух предварительных шагов. Таким образом, мы делаем два шага, находим в последнем направлении и используем его для шага из исходной точки. Двухшаговый экстраградиентный метод для отыскания седловых точек функционала $\varphi(x, y)$ задаётся следующими соотношениями

$$\bar{x}^k = P_Q(x^k - \alpha \varphi(x^k, y^k)),$$

$$\bar{y}^k = P_S(x^k - \alpha \varphi(x^k, y^k)),$$

$$\bar{x}^k = P_O(\bar{x}^k - \alpha \varphi(\bar{x}^k, \bar{y}^k)),$$

$$\bar{y}^k = P_S(\bar{y}^k - \alpha \varphi(\bar{x}^k, \bar{y}^k)),$$

$$x^{k+1} = P_O(x^k - \alpha \varphi(\bar{x}^k, \bar{y}^k)),$$

$$y^{k+1} = P_S(x^k - \alpha \varphi(\bar{x}^k, \bar{y}^k)),$$

где $\alpha > 0$ — числовой параметр; P_O, P_S — операторы проектирования на соответствующие множества; $[x^k, y^k]$ и $[x^{k+1}, y^{k+1}]$ — текущая и следующая точки алгоритма соответственно. Справедлива следующая.

Теорема 1. Если выполняются предположения а) — в) и, кроме того:

$$г) 0 < \alpha < 1/L,$$

то найдётся седловая точка $[x^*, y^*] \in X^* \times Y^*$ — такая, что $[x^k, y^k] \rightarrow [x^*, y^*]$ при $k \rightarrow \infty$.

Доказательство. Приведём исходную задачу к более удобному виду. В условиях теоремы точка $[x^*, y^*] \in Q \times S$ является седловой тогда и только тогда, когда выполняются неравенства [4]

$$(\varphi_x(x^*, y^*), x - x^*) \geq 0, \quad \forall x \in Q,$$

$$(\varphi_y(x^*, y^*), y - y^*) \geq 0, \quad \forall y \in S.$$

Если обозначить $u = [x, y]$, $T(u) = [\varphi_x(x, y), -\varphi_y(x, y)]$, $\Omega = Q \times S$, то эти условия могут быть записаны как

$$(T(u), u - u^*) \geq 0, \quad \forall u \in \Omega,$$

где $u^* = [x^*, y^*] \in U^* = X^* \times Y^*$.

Условие б) при этом означает, что оператор $T(u)$ является однозначно определённым, монотонным, т.е.

$$(T(u), u - u^*) \geq 0, \quad \forall u \in \Omega,$$

и, кроме того, условие Липшица запишется следующим образом

$$\|T(u) - T(v)\| \leq L\|u - v\|, \quad \forall u, v \in \Omega.$$

Рассматриваемый итеративный процесс может быть представлен в следующем виде

$$\bar{u}^k = P_\Omega(u^k - \alpha T(u^k)),$$

$$\bar{u}^k = P_\Omega(\bar{u}^k - \alpha T(\bar{u}^k)),$$

$$u^{k+1} = P_\Omega(u^k - \alpha T(\bar{u}^k)).$$

Необходимо показать, что последовательность $\{u^k\}$, определяемая этими соотношениями, сходится к некоторой точке $\bar{u} \in U^*$.

Для произвольного $u^* \in U^*$ оценим $\|u^{k+1} - u^*\|^2$, воспользуемся для этого свойством проекции на выпуклое множество: для любого u

$$(u - P_\Omega(u), v - P_\Omega(v)) \leq 0, \quad \forall v \in \Omega,$$

из которого следует:

$$\|u - v\|^2 \geq \|u - P_\Omega(u)\|^2 + \|v - P_\Omega(u)\|^2, \quad \forall v \in \Omega, \quad \forall u,$$

что при $v = u^*$, $u = u^k - \alpha T(\bar{u}^k)$, даёт

$$\begin{aligned} \|u^{k+1} - u^*\|^2 &\leq \|u^k - u^*\|^2 - \|u^k - u^{k+1}\|^2 - \\ &\quad - 2\alpha(T(\bar{u}^k), u^* - u^{k+1}) = \\ &= \|u^k - u^*\|^2 - \|u^k - \bar{u}^k\|^2 - \|\bar{u}^k - u^{k+1}\|^2 - \\ &\quad - 2\alpha(u^k - \bar{u}^k, \bar{u}^k - u^{k+1}) - 2\alpha(T(\bar{u}^k), u^* - \bar{u}^k) - \\ &\quad - 2\alpha(T(\bar{u}^k), \bar{u}^k - u^{k+1}). \end{aligned}$$

Продолжая цепочку преобразований и применяя условие Липшица, придём к следующему неравенству

$$\|u^{k+1} - u^*\|^2 \leq \|u^k - u^*\|^2 - (1 - \alpha^2 L^2) \|u^k - \bar{u}^k\|^2,$$

из которого следует, что

$$\|u^k - \bar{u}^k\| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty,$$

а последовательность $\|u^k - u^*\|$ — невозрастающая и, следовательно, $\{u^k\}$ ограничена. В силу конечномерности рассматриваемого пространства и замкнутости множества Ω существует сходящаяся подпоследовательность $\{u^{k_i}\}$, т.е.

$$u^{k_i} \rightarrow \bar{u} \quad \text{при} \quad k \rightarrow \infty, \quad \bar{u} \in \Omega.$$

Проведя ряд рассуждений, получаем, что последовательность $\{u^k\}$ сходится к тому же пределу \bar{u} , что и подпоследовательность $\{u^{k_i}\}$.

Изучим более подробно двухшаговый экстраградиентный метод для отыскания седловой точки билинейного функционала. Линейное программирование и матричные игры сводятся к задачам именно такого типа.

Пусть решается пара двойственных задач линейного программирования

$$(c, x) \rightarrow \min, \quad (b, y) \rightarrow \max,$$

$$A^T x \geq b, \quad Ay \leq c,$$

$$x \geq 0, \quad y \geq 0,$$

где $x, y \in R^n$; $y, b \in R^m$; A — матрица размерности $n \times m$, а A^T — транспонированная матрица, тогда решение таких задач сводится к отысканию седловых точек соответствующей функции Лагранжа

$$\min_{x \geq 0} \max_{y \geq 0} L(x, y), \quad L(x, y) = (c, x) + (b, y) - (Ay, x)$$

на множестве $x \geq 0, y \geq 0$.

Задача отыскания оптимальных стратегий матричной игры с платежной матрицей A также сводится к отысканию седловых точек билинейного функционала

$$M(x, y) = (e, x) + (e, y) - (Ay, x)$$

на множестве $x \geq 0, y \geq 0$. Здесь $e = (1, 1, \dots, 1)$ — вектор подходящей размерности.

Двухшаговый экстраградиентный метод отыскания седловой точки билинейного функционала на множестве $x \geq 0, y \geq 0$ может быть записан следующим образом:

$$\begin{aligned}\bar{x}^k &= [x^k + \alpha(Ay^k - c)]^+, \\ \bar{y}^k &= [y^k + \alpha(A^T \bar{x}^k - b)]^+, \\ \bar{x}^k &= [\bar{x}^k + \alpha(A\bar{y}^k - c)]^+, \\ \bar{y}^k &= [\bar{y}^k + \alpha(A^T \bar{x}^k - b)]^+, \\ x^{k+1} &= [x^k + \alpha(A\bar{y}^k - c)]^+, \\ y^{k+1} &= [y^k + \alpha(A^T \bar{x}^k - b)]^+, \end{aligned}$$

где $[p]^+ = \max\{0, p\}$ для скаляра p и $[p]^+ = ([p_1]^+, [p_2]^+, \dots, [p_l]^+)$ для вектора $p = (p_1, p_2, \dots, p_l)$.

Относительно сходимости последовательности, определяемой полученными рекуррентными соотношениями, докажем следующую теорему.

Теорема 2. Если выполняются следующие условия

а) билинейный функционал $(c, x) + (b, y) - (Ay, x)$ имеет на множестве $x \geq 0, y \geq 0$ единственную седловую точку $[x^*, y^*]$;

б) $0 < \alpha < \frac{1}{\|A\|}$,

то последовательность $\{[x^k, y^k]\}$ сходится со скоростью геометрической прогрессии:

$$\|x^{k+1} - x^*\|^2 + \|y^{k+1} - y^*\|^2 \leq q(\|x^k - x^*\|^2 + \|y^k - y^*\|^2).$$

Доказательство. Будем обозначать через a^i i -ю строку матрицы A , через \bar{a}^j — j -й столбец матрицы A , через z_i — i -ю компоненту вектора $z = (z_1, \dots, z_l)$. Пусть для седловой точки $[x^*, y^*]$ рассматриваемого нами функционала

$$I^* = \{i : (a^i, y^*) = c_i\},$$

$$J^* = \{j : (\bar{a}^j, x^*) = b_j\},$$

тогда, как известно, из предположения единственности седловой точки следует, что

$$(a^i, y^*) < c_i, \quad x_i^* = 0 \quad i \notin I^*,$$

$$(\bar{a}^j, x^*) > b_j, \quad y_j^* = 0 \quad j \notin J^*,$$

$$x_i^* > 0, \quad i \in I^*,$$

$$y_j^* > 0, \quad j \in J^*.$$

Выберем такое малое $\varepsilon > 0$, чтобы для всех $[x, y]$ из ε -окрестности точки $[x^*, y^*]$: $\|x - x^*\|^2 + \|y - y^*\|^2 \leq \varepsilon$ выполнялись неравенства

$$(\bar{a}^j, x) - b_j \geq \gamma > 0, \quad j \notin J^*,$$

$$(a^i, y) - c_i \leq -\gamma, \quad i \notin I^*,$$

$$x_i + \alpha(a^i y - c_i) \geq 0, \quad i \in I^*,$$

$$y_j + \alpha(\bar{a}^j x - b_j) \geq 0, \quad j \in J^*.$$

Для данного метода выполняются условия теоремы 1, следовательно, $\{[x^k, y^k]\}$ сходится к седловой точке. В результате, для некоторого $k > K$

$$x_i^{k+1} = [x_i^k + \alpha((a^i, \bar{y}^k) - c_i)]^+ \leq [x_i^k - \alpha\gamma]^+, \quad i \notin I^*,$$

$$y_j^{k+1} = [y_j^k + \alpha((\bar{a}^j, \bar{x}^k) - b_j)]^+ \leq [y_j^k - \alpha\gamma]^+, \quad j \notin J^*.$$

Откуда следует, что через конечное число шагов

$$x_i^k = 0, \quad i \notin I^*,$$

$$y_j^k = 0, \quad j \notin J^*, \quad \forall k > K_1 > K.$$

Теперь обозначая через v^k, w^k ненулевые компоненты векторов x^k и y^k , а через B — матрицу, получающуюся из A вычеркиванием строк с номерами $i \notin I^*$ и столбцов с номерами $j \notin J^*$, получим тот же метод, только для квадратной, невырожденной матрицы B размерности $l \leq \min\{n, m\}$ (в силу единственности седловой точки), для неё верно следующее утверждение

$$\|Bw\| \geq \frac{1}{\|B^{-1}\|} \|w\|, \quad \forall w \in R^l.$$

Используя равенства $B^T v^* = b, Bw^* = c$ получим оценки

$$\|v^k - v^*\|^2 = \alpha^2 \|B(w^k - w^*)\|^2 \geq \frac{\alpha^2}{\|B^{-1}\|^2} \|w^k - w^*\|^2,$$

$$\|w^k - w^*\|^2 \geq \frac{\alpha^2}{\|B^{-1}\|^2} \|v^k - v^*\|^2.$$

Теперь преобразуем конечную оценку, полученную в доказательстве теоремы 1,

$$\begin{aligned} \|v^{k+1} - v^*\|^2 + \|w^{k+1} - w^*\|^2 &\leq \|v^k - v^*\|^2 + \\ &+ \|w^k - w^*\|^2 - (1 - \alpha^2 \|A\|^2) (\|w^k - \bar{w}^k\|^2 + \|v^k - \bar{v}^k\|^2). \end{aligned}$$

Или, учитывая полученные выше оценки,

$$\|v^{k+1} - v^*\|^2 + \|w^{k+1} - w^*\|^2 \leq$$

$$\leq \left(1 - \frac{\alpha^2}{\|B^{-1}\|^2} (1 - \alpha^2 \|A\|^2)\right) (\|v^k - v^*\|^2 + \|w^k - w^*\|^2)$$

Поскольку $1 - \alpha^2 \|A\|^2 > 0$ по условию теоремы, то

$$q = 1 - \frac{\alpha^2}{\|B^{-1}\|^2} (1 - \alpha^2 \|A\|^2) < 1,$$

и мы получаем сходимость со скоростью геометрической прогрессии.

Предлагаемый в статье двухшаговый экстраградиентный метод решения задач о седловой точке является новым. Двухшаговый экстраградиентный метод является расширением стандартного экстраградиентного метода, но, в отличие от последнего, он состоит в том, чтобы перед шагом алгоритма делать два вспомогательных шага, а не один. Представлен ход доказательства теоремы о сходимости метода, а также показана его применимость к реальным задачам.

Применение предложенного метода распространяется и на задачи со связанными ограничениями [2].

Библиографический список

1. Г.М. Корпелевич. Экстраградиентный метод для отыскания седловых точек и других задач // Экономика и математические методы. — 1976. — Том 12, № 4. — С. 747–756.
2. А.С. Антипин. Методы решения вариационных неравенств со связанными ограничениями // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2000. — Том 40, № 9. — С. 1291–1307.

3. А.В. Зыкина. Обратная дополнительность в модели управления ресурсами // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2008. — Т. 48, № 11. — С. 1968–1978.

4. В.Ф. Демьянов, А.Б. Певный. Численные методы отыскания седловых точек // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 1972. — Том 12, № 5. — С. 1099–1127.

МЕЛЕНЬЧУК Николай Владимирович, аспирант кафедры «Автоматизированные системы обработки информации и управления».

Адрес для переписки: 644050, г. Омск, пр. Мира, 11.

Статья поступила в редакцию 09.10.2009 г.

© Н. В. Меленьчук

Информация

VII Всероссийская научно-практическая конференция-конкурс «Технологии Microsoft в теории и практике программирования»

Министерство образования и науки РФ, Томский политехнический университет (ТПУ),
Представительство корпорации Microsoft в РФ

23–24 марта 2010 г. в Центре инноваций Microsoft в Томском политехническом университете состоится VII Всероссийская научно-практическая конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Технологии Microsoft в теории и практике программирования».

Данная конференция проводится в ТПУ второй раз. Предыдущие конференции проходили в Москве, Санкт-Петербурге, Нижнем Новгороде, Новосибирске, Таганроге и Челябинске. Конференции проводятся с 2004 г. по инициативе представительства компании Microsoft в РФ, при поддержке Министерства образования и науки РФ. Конференции были поддержаны такими компаниями, как Autodesk, Intel, Motorola, «Лаборатория Касперского» и др.

Целью конференции является поддержка научных исследований студентов и молодых учёных в сфере ИТ, а также выявление талантливых молодых специалистов в области разработки информационных систем и содействие их подготовке к работе в профессиональных программистских коллективах.

В рамках программы конференции:

1. Пленарное заседание с докладами приглашенных учёных и специалистов.
2. Секционные заседания.
3. Региональный тур конкурса программных проектов международного технологического студенческого конкурса «Imagine Cup 2010».

Допускается одновременное участие в конференции и в конкурсе либо в одном из данных мероприятий.

Участники конференции:

К участию в конференции приглашаются студенты высших учебных заведений, аспиранты и молодые ученые.

Секции конференции:

1. Автоматизированные системы управления и мехатроника.
2. Высокопроизводительные и параллельные вычисления.
3. Геоинформационные системы и технологии.
4. Интеллектуальные системы и технологии.
5. Информационно-телекоммуникационные технологии.
6. Технологии разработки и проектирования информационных систем.
7. Информационные технологии в управлении социально-экономическими процессами.
8. Информационная безопасность.

На конференцию принимаются доклады, посвященные:

- практическим работам с использованием технологий корпорации Microsoft;
- технологическим разработкам в области программирования, проектирования и разработки программных продуктов;
- теоретическим работам в области информационных технологий (Computer Engineering и Computer Science).

Заявки, тезисы и работы на конкурс будут приниматься до 20 февраля 2010 г.

Более подробная информация доступна на сайте <http://festival.tpu.ru>

Источник информации: www.rsci.ru